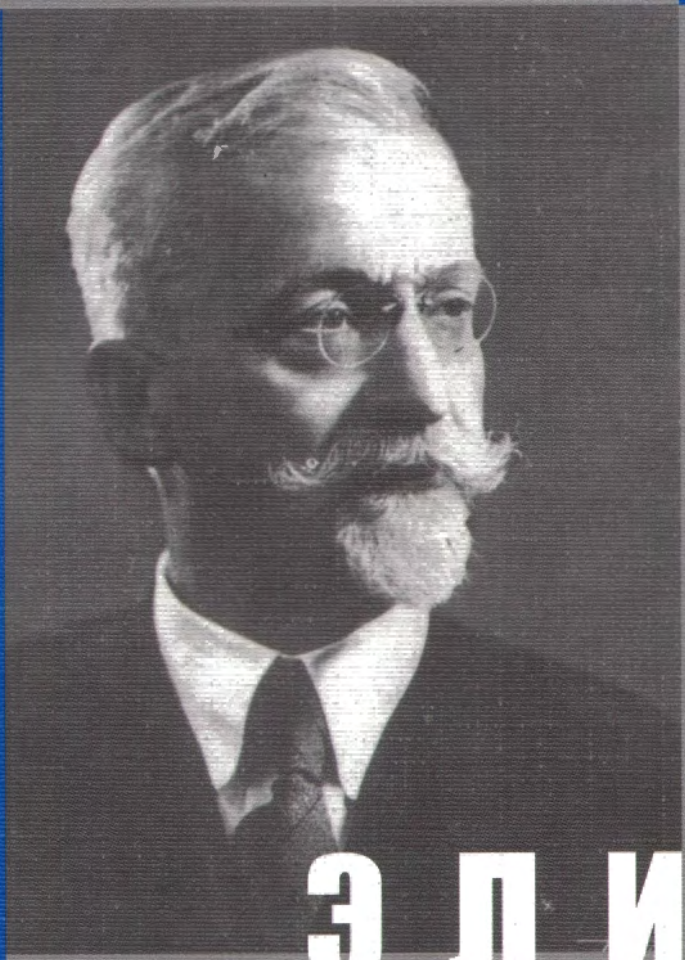
М. А. АКИВИС
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД



ЭЛИ КАРТАН

М. А. АКИВИС Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ЭЛИ КАРТАН

1869—1951

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51(092) + 514
ББК 22.1г + 22.15
А39

Акивис М. А., Розенфельд Б. А.
А39 Эли Картан (1869—1951). — М.: МЦНМО, 2007. — 328 с.: ил.
ISBN 498-5-94057-208-4

Книга посвящена описанию жизни и творчества великого французского математика Эли Картана, работы которого оказали огромное влияние на развитие математики в XX веке.

ББК 22.1г + 22.15

Издание поддержано русско-французской Лабораторией Понселе (Laboratoire Poncelet, UMI 2615).

ISBN 5-94057-208-1 (до 2007 г.)
ISBN 498-5-94057-208-4

© Акивис М. А., Розенфельд Б. А.
© МЦНМО

Предисловие

В 2006 г. исполнилось 55 лет со дня смерти Эли Картана, одного из величайших математиков XX века.

Эта книга написана двумя геометрами, работающими в двух областях геометрии, созданных Эли Картаном.

Математическое наследие Картана настолько обширно, что все его открытия невозможно описать в одной книге. Авторы ставят перед собой более скромную задачу — описать и оценить только наиболее важные достижения Картана и развитие его идей математиками позднейших поколений.

Главы 1—3 и 6 написаны Б. А. Розенфельдом, главы 5 и 7 — М. А. Акивисом, глава 4 написана обоими авторами. Мы выражаем сердечную благодарность сыну Эли Картана — Анри Картану, одному из крупнейших математиков нашего времени, который сообщил нам много подробностей о жизни отца и передал семейные фотографии.

Первый вариант этой книги, написанный в 1989 г., был опубликован в английском переводе в 1993 г. в серии «Математические монографии», издаваемой Американским математическим обществом (vol. 123). Анри Картан написал авторам об этом переводе: «Это — лучший памятник моему отцу».

Текст русского варианта книги не всюду точно совпадает с текстом ее английского варианта. В нем исправлены замеченные опечатки, кое-где текст сокращен, а в некоторых местах — значительно расширен.

Кроме того, в большей части русского варианта (главы 2—5) все индексы у тензоров записываются снизу и суммирование обозначается знаком $\sum$ в соответствии с тем, как это делал Картан в работах о группах и алгебрах Ли; лишь в главах 6 и 7, посвященных римановым и обобщенным пространствам, эти индексы пишутся внизу и вверху.

Глава 1

Жизненный путь Картана

Отчий дом

Эли Жозеф Картан родился 9 апреля 1869 г. в деревне Доломье в департаменте Изер на юго-востоке Франции. Река Изер, имя которой носит департамент, является одной из наиболее полноводных рек Франции, на которой в настоящее время стоят несколько гидроэлектростанций, питающих энергией промышленный район Гренобля — центра этого департамента. Первая гидроэлектростанция на Изере была построена в год рождения Э. Картана владельцем писчебумажной фабрики Аристидом Берже.

Департамент Изер является центральной частью исторической французской провинции Дофине, когда-то бывшей графством, входившим в Бургундское королевство, а впоследствии вотчиной дофина — старшего сына короля, наследника престола. Провинция Дофине простиралась от Альп до реки Роны, левым притоком которой является Изер. Первоначально столицей Дофине был город Вьенн, впоследствии столицей провинции стал Гренобль.

Доломье во время детства Картана имела около пятисот жителей и была центром шелководства и шелкопрядения.

На рис. 1.1 видна площадь Марсово поле в Доломье (ныне площадь Эли Картана) и дом, где Картан жил в детстве с 3 до 10 лет (дом семьи Картана — второй справа).

Доломье была родиной известного геолога Деодата Ги Сильвена Грате де Доломье (1750—1801), академика и участника знаменитого египетского похода Наполеона. Имя Доломье увековечено в названии открытого им минерала — доломита.

Предки Картана были крестьянами. Сам Эли Картан писал свою фамилию Cartan, а его предки — по-разному. Упомянем два из этих вариантов: Quartant — «четвертующий» и Carthan, напоминающие о карфагенянах, которые под предводительством Ганнибала прошли через Испанию, родные места Картана и Италию, до Рима, и пытались взять Рим.

Рис. 1.1

Известно имя прадеда Эли Картана — Бенуа (1779—1854). Дед Э. Картана, также носивший имя Бенуа (1801—1854), был мельником. Отец Э. Картана Жозеф (1837—1917) родился в деревне Сен-Виктор-де-Морестель, находящейся в 13 км от Доломье. После его женитьбы на Анне Коттаз (1841—1927) семья поселилась в Доломье, где жила Анна. Жозеф Картан был деревенским кузнецом. Эли Картан вспоминал: «Мое детство убаюкивалось ударами по наковальне, раздававшимися каждое утро, начиная с самой зари, и я еще вижу мою мать, которая в мгновения, оставшиеся свободными от забот о детях и хлопот по хозяйству, работает за прялкой» [189, с. 51]. На рис. 1.2 мы видим родителей Эли Картана в 1890 г. Э. Картан вспоминал о них, «скромных крестьянах, которые в течение своей долгой жизни дали своим детям пример радостного труда и мужества в преодолении трудностей» [189, с. 51].

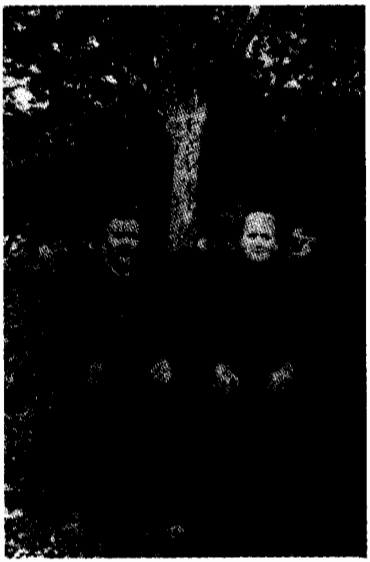


Рис. 1.2

В семье Картанов было четверо детей, из которых Эли был вторым. Старшая сестра Жанна-Мари (1867—1931) была портнихой, младший брат Леон (1872—1956) стал кузнецом и работал вместе с отцом. Младшая сестра Эли, Анна (1878—1923), не без влияния брата стала математиком. Она окончила Высшую Нормальную школу для девушек в Севре и преподавала математику в различных лицеях для девушек. Анна Картан была автором двух учебников для этих лицеев — по арифметике и геометрии для первого года обучения и по геометрии для второго года обучения, оба эти учебника выдержали много изданий.

Школьник и лицеист

Эли Картан начал учиться в начальной школе в родной деревне. С большой теплотой он вспоминал своих учителей — Коллона и особенно Дюпюи, давших двум сотням мальчиков первоначальное образование, значение которого он смог оценить значительно позднее. Эли был лучшим учеником этой школы, впоследствии Дюпюи писал о нем: «Эли Картан был застенчивым учеником, но в его глазах блистал удивительный свет незаурядного ума, соединенного с чудесной памятью. Ни один вопрос не мог поставить его в затруднение: он знал все, чему обучали в классе, и понимал все еще до того, как учитель заканчивал свои объяснения». Картан «мог не задумываясь перечислить все супрефектуры в любом департаменте Франции» и от него «не ускользали никакие грамматические тонкости правил причастий прошедшего времени» [189, с. 52].

Поворот в судьбе Картана произошел следующим образом: «Однажды кантональный делегат по имени Антонен Дюбо приехал для инспекции школы. Этот визит определил всю мою жизнь. Инспектор решил, что я должен участвовать в конкурсе на стипендии в лицеях. Г-н Дюпюи управлял моей подготовкой с сердечным участием, которого я не забуду никогда. Все это заставило меня совершить прекрасную поездку в Гренобль, где я без особого труда сдал экзамены, оказавшиеся не слишком страшными. Мои блестящие успехи наполнили гордостью г-на Дюпюи, и, благодаря поддержке г-на Дюбо, который в течение всей своей жизни с любовью вполне отеческой интересовался моей карьерой и моими успехами, я был награжден полной стипендией в коллеже Вьенна» [189, с. 52].

Антонен Дюбо (1844—1921) был личностью замечательной во многих отношениях: журналист-республиканец в эпоху Наполеона III, после установления во Франции Третьей Республики он стал префектом департамента Орн к западу от Парижа, затем переехал в департамент Изер,

депутатом от которого он был в 1880—1897 гг. В этот период он был министром юстиции в кабинете Казимира Перье. В 1897 г. Дюбо избирается в Сенат, в 1906—1920 гг. он был председателем Сената Франции.

Картан характеризовал Дюбо как человека, обладающего неиссякаемым оптимизмом, основанным на горячей вере в прогресс, силе разума и желании находить истину и делать добро.

В это время во Франции имелись два типа средних учебных заведений — коллежи, принадлежавшие местному самоуправлению, и лицеи, принадлежавшие Министерству народного просвещения.

«Таким образом, — вспоминал Картан, — в возрасте десяти лет я с радостью покинул отчий дом, не подозревая, что уже через несколько дней я пожалею о том, что потерял. Я должен был привыкнуть к жизни в общежитиях, где мне пришлось провести более десяти лет. После пяти лет коллежа, где мне приходилось ограничивать себя скудной едой два раза в день, моя стипендия была переведена в Гренобльский лицей, где я закончил свое классическое образование риторикой и философией, а затем в лицей Жансона де Сайи, который совсем недавно открылся и все были в восхищении от успеха Ле Дантека, принятого первым в Нормальную школу.

В лицее Жансона у меня были замечательные преподаватели — Соломон Блош (по элементарной математике) и Эмиль Лакур (по специальной математике)» [189, с. 52]. В лекции [190] Картан вспоминал, что он решил стать математиком после того как прочел книгу Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых», которой его наградили за успехи в лицее Жансона де Сайи.

В одном классе с Картаном в этом лицее учился Жан Батист Перрен (1870—1942), впоследствии один из наиболее замечательных физиков Франции, которого связывала с Картаном дружба в течение всей жизни.

Студент

По окончании лицея Жансона де Сайи Картан решил стать математиком. В Париже в то время математиков готовили в Парижском университете, основанном в 1253 г. Робером Сорбоном, в Политехнической школе и в Высшей Нормальной школе, которые были открыты во время Великой Французской революции.

Политехническая школа, в которой обучались три (впоследствии два) года, давала математическую и общетехническую подготовку, после которой студенты проходили специализацию в высших технических учебных заведениях.

Высшая Нормальная школа была высшим педагогическим учебным заведением с трехгодичным обучением. Картан поступил в Высшую Нормальную школу в 1888 г. Во время обучения в этой школе Картан также посещал лекции в Сорбонне.

Из профессоров, лекции которых Картан слушал в это время, на первое место он ставил «математического гиганта Анри Пуанкаре, лекции которого потрясали нас. Нет ни одной ветви современной математики, которая не испытала бы его влияния» [189, с. 54].

Пуанкаре (1854—1912) был не только математиком, но и физиком, астрономом и философом. В 1883 г. Пуанкаре создал теорию автоморфных функций, тесно связанную с теорией групп и с геометрией Лобачевского. Пуанкаре привлек внимание Картана к геометрическим применениям теории групп.

Картан упоминал также Шарля Эрмита (1822—1901), специалиста по анализу, алгебре и теории чисел. В связи с задачами теории чисел он ввел «эрмитовы формы», играющие важную роль в геометрии. Картан упоминал Жюля Таннери (1848—1910), одного из основателей французской теоретико-множественной школы; Гастона Дарбу (1842—1917) — геометра, одного из основоположников метода подвижного репера, известного также своими работами по теории дифференциальных уравнений; Поля Аппеля (1855—1930), специалиста по анализу и механике; Эмиля Пикара (1856—1941), который работал в области теории дифференциальных уравнений и широко применял в ней геометрические и теоретико-групповые методы; Эдуарда Гурса (1858—1936), автора работ по теории дифференциальных уравнений и о группах преобразований.

Высшая Нормальная школа в то время была тесно связана с норвежским математиком Софусом Ли (1842—1899), который в 1886—1889 гг. возглавлял кафедру геометрии в Лейпцигском университете. В 1888—1889 гг. по рекомендации Ж. Таннери и Г. Дарбу несколько молодых французских математиков, в том числе Эрнест Вессио (1865—1952) и Артюр Тресс (1868—1958) в течение года учились у С. Ли в Лейпциге. Живо интересовался работами С. Ли и Пикар. После возвращения Вессио в Париж появились статьи Пикара и Вессио о применении непрерывных групп к проблеме интегрируемости дифференциальных уравнений, продолжавшие исследования Софуса Ли. Конечномерные непрерывные группы, которые рассматривал С. Ли, в настоящее время называются *группами Ли*; С. Ли называл эти группы «конечными непрерывными группами».

Картан окончил Высшую Нормальную школу в 1891 г. и стал лектором факультета естественных наук университета в Монпелье, но вскоре

был призван во французскую армию, где служил в течение года и получил звание сержанта.

Доктор наук

В статьях Пикара и Вессио особую роль играли так называемые разрешимые, или интегрируемые, группы Ли. В связи с этим возникла задача о перечислении всех простых групп Ли, так как наличие простых подгрупп в группе Ли свидетельствует о ее неразрешимости.

Теории простых групп Ли была посвящена опубликованная в 1888—1890 гг. статья немецкого математика Вильгельма Киллинга (1847—1923) «Строение конечных непрерывных групп преобразований» [Kil2]. Интерес Картана к этим вопросам возник под влиянием А. Тресса, учившегося вместе с ним в Высшей Нормальной школе. Вернувшийся из Лейпцига А. Тресс рассказал Картану о статье Киллинга и о том, что в ней было найдено несколько неверных утверждений о нильпотентных группах («группах нулевого ранга»). Тресс сообщил Картану, что лейпцигский математик Ф. Энгель поставил перед своим учеником К. А. Умлауфом (1866—?) задачу исправления неточностей Киллинга. Умлауф задачу выполнил и защитил докторскую диссертацию «О строении конечных непрерывных групп преобразований, в особенности групп нулевого ранга» [Um] (1891). Тресс посоветовал Картану выяснить, не содержит ли неточности основная часть работы Киллинга. Эта задача и привела Картана к теме его докторской диссертации.

Картан работал над этой темой в 1892—1894 гг. в Париже. Как окончивший Высшую Нормальную школу с отличием, Картан получил стипендию фонда Пеко, учрежденную в 1885 г. для поддержки талантливых молодых ученых этой школы.

Картан изучил работу Киллинга и пришел к выводу, что главная часть этой работы правильна, и что примененный Киллингом новый метод, основанный на изучении «корней» простых групп Ли, является исключительно эффективным методом для изучения таких групп. В то же время Картан обнаружил некоторые ошибочные утверждения Киллинга.

Картан дал строгое доказательство многих результатов Киллинга и провел полную классификацию всех комплексных простых групп Ли.

В 1892 г. Софус Ли приехал в Париж по приглашению Дарбу и Таннери и провел там 6 месяцев. Картан был представлен С. Ли и неоднократно с ним беседовал. Картан вспоминал, что в это время С. Ли «часто можно было видеть в кафе „La source“ на бульваре Сен-Мишель; нередко бывало, что белое мраморное покрытие одного из его столиков

оказывалось заполненным формулами, которые мэтр писал, чтобы пояснить свои идеи» [201, с. 255—256].

«Софус Ли был высокого роста и имел классическую внешность человека Севера. Светлая широкая борода обрамляла его лицо, и его серо-голубые глаза светились за очками. Он производил впечатление человека необычайной физической силы. При общении с ним всегда чувствовалась его искренность и доброта... Потомки будут видеть в нем только гения, создавшего теорию групп преобразований, но мы, французы, никогда не сможем забыть о наших связях с ним, которые делают память о нем дорогой для нас» [201, с. 257].

Белокурому северному гиганту также нравился юный француз небольшого роста с живым огнем в черных глазах, понимавший его с полуслова.

В 1893 г. Картан опубликовал свои первые научные работы — две заметки [1], [2] в «Докладах Парижской академии наук», представленные Э. Пикаром. В этих заметках были кратко описаны результаты Картана по теории простых групп Ли. Подробности были изложены в том же году в немецкой статье «О простых группах преобразований» [3], опубликованной в Лейпциге. Докторская диссертация Картана «Строение конечных непрерывных групп преобразований», которую он защитил в 1894 г. на факультете наук Сорбонны, была опубликована отдельной книгой [5].

В 1894—1896 гг., когда Картан работал лектором в университете города Монпелье, он опубликовал еще несколько работ по теории простых групп Ли [4], [8] и [9], последнюю статью — в США. В работах [6], [7] Картан предложил новое доказательство теоремы Бертрана в теории подстановок, основанное на рассмотрении полной группы подстановок.

В 1896 г. вышла первая работа Картана по интегральным инвариантам «Принцип двойственности и некоторые кратные интегралы в тангенциальном и линейчатом пространствах» [10].

В 1896—1903 гг. Картан был лектором факультета естественных наук университета в Лионе. В это время он продолжал интенсивную научную работу. В 1897 г. вышли две заметки [11], [12] о «системах комплексных чисел», под которыми, в соответствии с французской традицией, Картан понимал ассоциативные алгебры, называемые также системами гиперкомплексных чисел. В 1898 г. Картан подробно изложил построенную им теорию в статье «Билинейные группы и системы комплексных чисел» [13].

Размышления Картана о дифференциальных формах, уже встречавшихся в его работах о группах Ли и в работе об интегральных инва-

риантах, привели Картана к так называемой проблеме Пфаффа — теории интегрирования уравнений Пфаффа, равносильных дифференциальным уравнениям в частных производных. В 1899 г. вышла первая работа Картана по этой теме — «О некоторых дифференциальных выражениях и проблеме Пфаффа» [14], за которой в 1901—1902 гг. последовали статьи [15], [16], [17], [18a] и заметка [19].

В 1903 г. Э. Картан женился на Мари-Луизе Бьянкони (1880—1950), отец которой Пьер-Луи Бьянкони (1845—1929), корсиканец по происхождению, был профессором химии.

Профессор

В 1903 г. Картан получил должность профессора на факультете естественных наук университета в г. Нанси — главном городе департамента Мерт-э-Мозель в той части Лотарингии, которая не отошла к Германии после войны 1869—1870 гг.

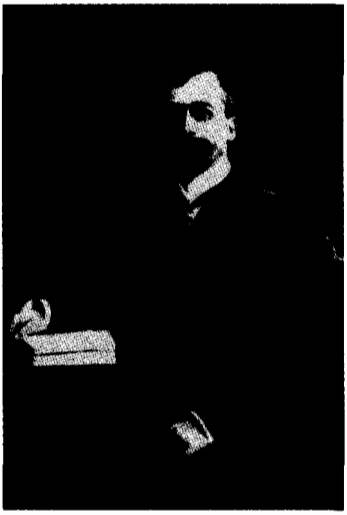


Рис. 1.3

В Нанси Картан также читал курс анализа в Институте электротехники и прикладной механики, где он впервые встретился с большими аудиториями. Картан вспоминал: «Это преподавание сильно заинтересовало меня и принесло глубокое удовлетворение, когда я почувствовал контакт со студентами. Я обнаружил также, что подготовлен к преподаванию общей математики, чем я и занимался несколько позже в Сорбонне» [189, с. 55]. В Нанси родились сыновья Картана Анри (в 1904 г.) и Жан (в 1906 г.). На рис 1.3 мы видим портрет Картана в 1904 г. В 1902 г. заметкой [20] Картан начал цикл работ о «бесконечных непрерывных группах», которые в настоящее время называются псевдогруппами Ли. Подробному изложению этой теории посвящена работа 1904—1905 гг. «О строении бесконечных групп преобразований» [21, 22]. За этой работой последовали заметка [23] в 1907 г. и статья [26] в 1908 г. В 1908 г. во французском издании «Энциклопедии математических наук» Картан опубликовал статью «Комплексные числа» [27], являющуюся расширенным французским переводом статьи Эдуарда Штуди (1862—1930) [Stu1] из немецкого

издания этой энциклопедии. Обработка Картана превосходит статью Штуди более чем в четыре раза.

В 1907—1908 гг. Картан опубликовал две геометрические заметки об определении площади участка кривой поверхности [24], [25]. В 1909 г. Картан с семьей переехал в Париж, где в том же году родился его сын Луи.

В Париже Картан сначала работал лектором факультета естественных наук Сорбонны, а в 1912 г. стал профессором этого факультета на основании отзыва Пуанкаре о его работах. Этот отзыв [Poi3] Пуанкаре написал накануне роковой операции.

В 1909 г. Картан построил дом в своей родной деревне Доломье (рис. 1.4), куда он обычно приезжал на каникулы. В Доломье Картан

Рис. 1.4

продолжал заниматься наукой, работал в саду (рис. 1.5) и нередко заходил в семейную кузницу и помогал отцу и брату, раздувая кузнечные мехи.

В 1910 г. в заметке [29] и статье [31] Картан впервые связывает теорию групп Ли и теорию уравнений Пфаффа с методом подвижного репера, который впоследствии стал основным методом геометрических работ Картана. В 1910—1912 гг. Картан в работах [30], [32], [33], [34] продолжал изучение уравнений Пфаффа и систем дифференциальных уравнений в частных производных. В заметках [35], [36] Картана рассматривались применения геометрии к кинематике и статике. В 1913—1914 гг. Картан возвратился к теории простых групп Ли: в работе [37] Картан построил

теорию линейных представлений комплексных простых групп Ли, в работе [38] он решил задачу классификации вещественных простых групп Ли, а в работе [39] обобщил результаты работы [37] на вещественные простые группы Ли.

Рис. 1.5

В 1914—1915 гг. были опубликованы заметки [40], [41], [42] и статьи [44], [45] об интегрировании систем дифференциальных уравнений и некоторых семействах кривых. Была напечатана популярная статья «Теория групп» [43].

В 1914—1915 гг. была написана статья «Непрерывные группы и геометрии» [46] для французского издания «Энциклопедии математических наук» — обработка статьи [Fan] Джино Фано (1871—1952) из немецкого издания этой энциклопедии. В 1914 г. было опубликовано только начало статьи [46]. Во время Первой мировой войны издание энциклопедии было прекращено. Полностью эта статья была опубликована только после смерти Картана в собрании его сочинений [207].

В 1916—1918 гг. Картан написал статьи о деформации гиперповерхностей n-мерных евклидова [17] и конформного [18], [19] пространств.

В 1918 г. были опубликованы четыре заметки о трехмерных многообразиях n-мерного евклидова пространства: общая теория [50], теория многообразий нулевой кривизны [50a] и многообразий постоянной отрицательной [50b] и положительной [50c] кривизны. В статьях [51], [52] результаты этих заметок были обобщены в 1919—1920 гг. на p-мерные многообразия как евклидова, так и проективного и неевклидовых пространств.

В 1920 г. опубликованы заметки [53], [53a] и статья [54] о проективной деформации поверхностей и доклад [55] «Об общей проблеме деформации».

В 1922 г. опубликованы работы [56], [57] по общей теории относительности Эйнштейна. Размышления об этой теории привели Картана к его первым работам [58], [59], [60], [61], [62] об «обобщенных про-

странствах». В том же году вышла статья «О малых колебаниях жидкой массы» [63] и книга «Лекции об интегральных инвариантах» [64], где подведены итоги исследований Картана об интегральных инвариантах и их приложениях к механике.

В заметке [62] и в статье [65] 1923 г. Картан рассматривал введенное Германом Вейлем (1885—1955) обобщение римановой геометрии, с помощью которого Вейль пытался построить единую теорию поля. Развивая идеи Вейля, Картан определил обобщенные пространства, которые он хотел применить для создания общей теории поля, — пространства евклидовой, метрической и аффинной связности. Первые два из этих пространств отличаются от риманова пространства и пространства Вейля наличием кручения. Эти геометрии были изложены в статье «О многообразиях аффинной связности и обобщенной теории относительности» в трех частях [66] (1923), [69] (1924) и [80] (1925). В этой же статье определены изотропное пространство и пространства изотропной связности. В статьях [68] (1923) и [70] (1924) Картан определил пространства проективной и конформной связности.

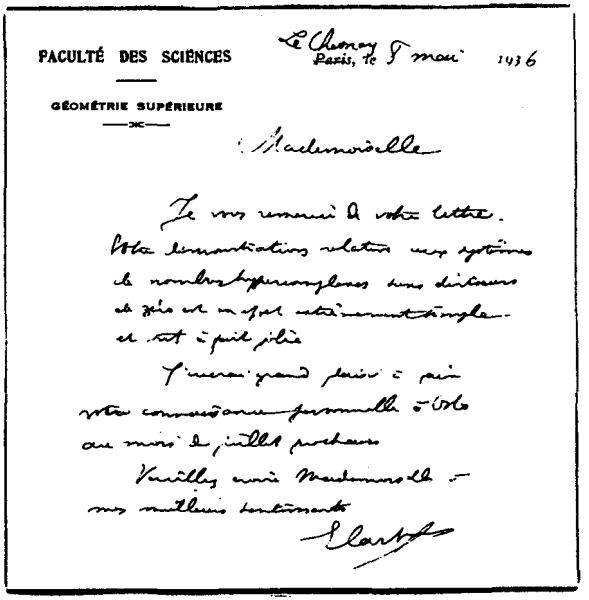
В 1923 г. Картан опубликовал также статью [67] о неаналитических функциях и особых решениях дифференциальных уравнений, а в 1924 г. — статью [71] и доклад [72] об обобщенных пространствах, доклад [73] и заметку [74] о применении метода внешних форм в дифференциальной геометрии и заметки [76], [77] об аффинной и проективной связностях на поверхностях.

С 1924 по 1940 г. Картан возглавлял кафедру высшей геометрии факультета естественных наук Сорбонны.

С 1917 по 1936 г. Картан с семьей жил в деревне Ле-Шеней близ Версаля, где в 1917 г. родилась его дочь Элен. В 1936 г. семья переехала в квартиру многоэтажного дома № 95 на бульваре Журдан в южной части Парижа. В этой квартире Картан прожил 15 лет. На рис. 1.6 воспроизведен автограф Картана — его письмо алгебраистке Ольге Таусски (1906—1995), которая прислала ему изложение своих результатов по теории алгебр. В своем ответе Картан написал: «Ваше доказательство, относящееся к системам гиперкомплексных чисел без делителей нуля, действительно исключительно просто и очень красиво».

В 1925 г. опубликована книга Картана «Геометрия римановых пространств» [84], заметка [79] о теории обобщенных пространств, статья [81] о теории представлений простых групп Ли и заметка [83] о двупараметрических группах движений.

В 1925 г. вышла также статья «Принцип двойственности и теория простых и полупростых групп» [82], в которой принцип двойственности


FACULTÉ DES SCIENCES

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

Le Chesnay Paris, le 8 mai 1936

Mademoiselle

Je vous remercie de votre lettre.
Votre démonstration relative aux systèmes
de nombres hypercomplexes sans diviseurs
de zéro est en effet extrêmement simple
et tout à fait jolie.
J'aurai grand plaisir à faire
votre connaissance personnelle à Oslo
au mois de juillet prochain.
Veuillez croire Mademoiselle à
mes meilleurs sentiments

Elart

Рис. 1.6

классической проективной геометрии обобщается на геометрии других простых групп Ли и формулируется принцип тройственности для одной из таких групп.

Совместно с сыном Анри Картан опубликовал в 1925 г. заметку «О генерации вынужденных колебаний» [78].

В 1926 г. заметкой «О римановых пространствах, в которых параллельное перенесение сохраняет кривизну» [87] Картан начал изучение важного класса римановых пространств, которые впоследствии он назвал «симметрическими». Впервые эти пространства рассматривались Петром Алексеевичем Широковым (1895—1944) [Ши1]. Независимо от Широкова эти пространства в 1926 г. определил Гарри Леви (р. 1902).

Заметка Леви заинтересовала Картана, и, обдумав ее, Картан установил связи этих пространств с простыми группами Ли. В 1926—1927 гг. Картан дал развернутое изложение геометрии этих пространств в статье «Об одном замечательном классе римановых пространств» в двух частях [93, 94].

В 1927 г. в заметках [91], [92], написанных совместно с Яном Арнольдусом Схоутеном (1887—1971), в заметках [95], [96], [97], [98],

[99], [100] и в статьях «Геометрия простых групп» [103], «Теория групп и геометрия» [105] и «О некоторых замечательных римановых формах геометрий с простой фундаментальной группой» [107] Картан изучал различные вопросы геометрии симметрических римановых пространств и дал их полную классификацию.

В 1926 г. были опубликованы также доклад [85] о применении римановой геометрии к топологии, заметка [86] о системах дифференциальных уравнений, статьи [88] об обобщенных пространствах, [89] о сферах римановых пространств и [90] об аксиоме плоскости в дифференциальной геометрии.

В 1927 г. в статье «Геометрия групп преобразований» [101] Картан построил геометрию симметрических пространств аффинной связности и установил ее связь с теорией произвольных групп Ли.

В 1927 г. были опубликованы также статьи «О некоторых арифметических циклах» [102], «О погружении риманова пространства в евклидово» [104] и статьи [106] и [108] об обобщенных пространствах и о вариационной задаче в проективной геометрии.

В 1926—1927 гг. Картан прочел в Сорбонне курс лекций о римановой геометрии в ортогональном репере, впоследствии опубликованный в русском переводе С. П. Финиковым [108а].

В 1928 г. были опубликованы «Лекции о геометрии римановых пространств» [114], заметки [109] о полных ортогональных системах функций на некоторых компактных римановых пространствах, [110] о компактных римановых пространствах, допускающих транзитивную непрерывную группу движений, [111] о числах Бетти компактных простых групп Ли, дополнение [113] к статье [103], доклад [112] о устойчивости эллипсоидов Якоби, посвященный развитию теории Пуанкаре об устойчивых формах вращающейся жидкости, заметка [115] о мнимых ортогональных подстановках, доклады [119] о геометрической интерпретации неголономных материальных систем и [120] о компактных пространствах, допускающих транзитивную группу Ли преобразований.

В 1929 г. в статье «Замкнутые и открытые простые группы и риманова геометрия» [116] Картан провел классификацию некомпактных простых групп Ли гораздо проще, чем в статье [38], с помощью теории симметрических пространств. В статьях [117], [118] Картан дал развернутое изложение своих заметок [109] и [111].

В 1930 г. опубликованы книга Картана [128] о связи теории групп Ли и топологии, заметки [121], [122] о линейных представлениях компактных групп Ли, заметки [123], [123а] о третьей основной теореме Ли, заметка [124] о применении абсолютного параллелизма в общей теории

относительности, статьи [125] о линейных представлениях компактных простых групп Ли, [126] о проблеме эквивалентности в теории обобщенных пространств и доклад «Проективная геометрия и риманова геометрия» на I Съезде математиков СССР в Харькове. Картан остановился в Москве и прочел в Московском университете курс лекций «Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства», опубликованный в виде книги [144].

В 1931 г. опубликованы «Лекции о проективной комплексной геометрии» [134], в которых подробно рассмотрены геометрия трехмерного комплексного проективного пространства и подчиненные ей геометрии. В том же году вышли статьи «Абсолютный параллелизм и единая теория поля» [130], «Евклидова геометрия и риманова геометрия» [129], «О теории систем в инволюции и ее приложениях к теории относительности» [131] и «О развертках линейчатой поверхности» [132], доклад [133] о геометрии ориентированных сфер и обзор [187] математических работ Картана.

В течение почти двадцати лет после защиты докторской диссертации тематика Э. Картана не разрабатывалась другими математиками. Этому способствовала его исключительная скромность, а также то, что в этот период центр внимания французских математиков лежал в теории множеств и теории функций.

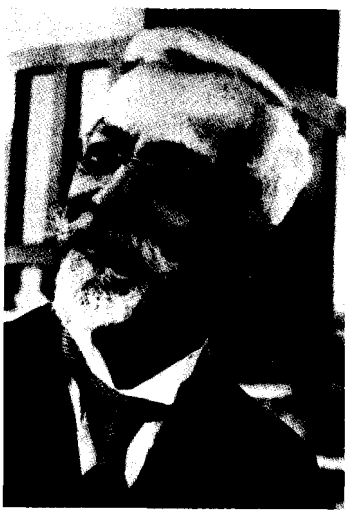


Рис. 1.7. Э. Картан в 1931 г.

Положение изменилось в начале 20-х годов, когда работами Картана заинтересовался Г. Вейль. Он получил в 1924—1925 гг. важные результаты, которые были развиты в 1933 г. Бартелем Лендертом Ван дер Варденом (1903—1996). Работы Картана по геометрии обобщенных пространств были тесно связаны с работами Вейля и Я. А. Схоутена по геометрии пространств аффинной связности, начатые ими, соответственно, в 1918 и 1921 гг.

О признании научной тематики Картана математиками разных стран свидетельствует его избрание в академии наук ряда стран: в 1921 г. в Польскую академию, в 1926 г. — в Норвежскую, в 1927 г. — в Итальянскую.

В 1931 г. Э. Картана избирают академиком Парижской академии наук.

Академик

Став академиком, Картан продолжает интенсивную научную работу.

В 1932 г. опубликованы статьи «О группе гиперсферической геометрии» [135], «О псевдоконформной геометрии гиперповерхностей пространства двух комплексных переменных» в двух частях [136, 136a], «О топологических свойствах комплексных квадрик» [137], доклад [139] о псевдоконформной геометрии, доклад [138] о симметрических римановых пространствах.

В 1933 г. вышли книги «Метрические пространства, основанные на понятии площади» [140], русский перевод курса лекций [144], заметки [140a] о кинематике Ньютона и пространствах евклидовой связности, [141], [141a] и [140b] о финслеровых пространствах и речь [188] при открытии памятника Г. Дарбу.

В 1934 г. опубликована книга «Финслеровы пространства» [142], два замечания [142a], [142b] по поводу сообщений А. Вейля, заметка [143] о применении тензоров в проективной геометрии. В том же году была написана статья «Единая теория Эйнштейна—Майера» [143a], опубликованная только в собрании сочинений Картана [207].

В 1934 г. Картан участвовал в Международной конференции по тензорной дифференциальной геометрии в Москве и сделал там три доклада [152], [153], [154].

В 1935 г. вышел французский текст лекций Картана [144], статьи «Однородные ограниченные области пространства n комплексных переменных» [145] и «Проективное тензорное исчисление» [147], заметка [145a] о числах Бетти компактных простых групп Ли, замечания [146] о заметке Ж. Булигана и доклад «Об одном вырождении евклидовой геометрии» [147a].

В 1936 г. были опубликованы статьи [150] о топологии групп Ли и [148] о геометрии интеграла $\int F(x, y, y', y'')\,dx$, заметка [149] о полях однородного ускорения в теории относительности и доклад «Роль теории групп в эволюции современной геометрии» [151].

В 1937 г. вышли книги «Лекции по теории пространств проективной связности» [155] и «Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия» [157], тексты и русские переводы докладов [152], [153], [154], статья «Распространение тензорного исчисления на неаффинные геометрии» [156], доклады «Роль аналитической геометрии в эволюции геометрии» [158], «Проблемы эквивалентности» [161a] и «Структура бесконечных групп» [161b] и статьи [159], [160], [161] во французской «Энциклопедии».

Рис. 1.8. Приезд Картана в Москву. Картан — слева в первом ряду, справа — председатель конференции Вениамин Федорович Каган (1869—1953 гг.)

В 1938 г. опубликована книга «Лекции о теории спиноров» [164], статьи «Линейные представления групп Ли» [162], «Теория Галуа и ее обобщения» [165], «Семейства изопараметрических поверхностей в пространствах постоянной кривизны» [166] и заметка «Обобщенные пространства и интегрирование некоторых классов дифференциальных уравнений» [163].

В 1939 г. были напечатаны статьи Картана «О замечательных семействах изопараметрических поверхностей в сферических пространствах» [167] и «Абсолютное дифференциальное исчисление при решении новых задач римановой геометрии» [169] и доклад [168] о некоторых семействах гиперповерхностей.

18 мая 1939 г. в Сорбонне состоялось чествование Эли Картана в связи с его 70-летием. Собрание открыл ректор Сорбонны, медик, академик Гюстав Русси (1874—1948). Учитель Картана, академик Э. Пикар дал краткую характеристику работ Картана по теории групп Ли, теории дифференциальных уравнений, римановой геометрии и теории обобщенных пространств. Пикар подчеркнул, что Картан не только был «чистым математиком, художником и поэтом в мире чисел и форм», но занимался также проблемами физики, связанными с теорией относительности, и написал книгу о спинорах.

Декан факультета естественных наук Сорбонны, академик Шарль Морен (1871—1967) в своем приветствии вспомнил обо всех университетах мира, в которых работал или выступал с лекциями Картан.

Один из основоположников метода подвижного репера, бельгийский академик Альфонс Демулен (1869—1947) приветствовал Картана от имени ученых всего мира и отметил, что в 1910 г. Картан предложил наиболее общую формулировку метода подвижного репера.

Школьный друг Картана Артюр Тресс, почетный генеральный инспектор школ второй ступени, приветствовал Картана от имени его соучеников и вспоминал их студенческие годы. Тресс также приветствовал продолжателей научной «династии Картана» — математиков Анри и Элен, физика Луи и вспомнил добрым словом покойного сына Картана композитора Жана.

Известный физик, академик Поль Ланжевен (1872—1946) рассказал о работах Картана, связанных с физикой.

Заместитель директора Высшей Нормальной школы Жорж Брюа (1887—1944) рассказал о многообразных связях Картана со Школой. Профессор Сорбонны, академик Гастон Жюлиа (1893—1965) вспоминал, как слушал лекции Картана в Высшей Нормальной школе и как снова встретился с Картаном в госпитале, размещенном в той же школе, где Жюлиа выздоравливал после тяжелых ранений.

Президент Французского математического общества Антуан Вернь приветствовал Картана как активного члена этого общества.

Профессор математики университета в Нанси Жан Дьедонне (1906—1992) приветствовал Картана от имени молодых ученых.

На заседании выступил Эли Картан с воспоминаниями о своем пути в науку. Это выступление [189] мы неоднократно цитировали выше и приводим целиком в Приложении 1.

В заключение заседания оркестр исполнил сочинение Жана Картана «Памяти Данте».

К юбилею был выпущен сборник избранных трудов Эли Картана [204], содержащий работы [37], [70], [118], [150], [161a], [162] и обзор трудов Картана [187].

В 1940 г. Картан ушел в отставку с должности профессора Сорбонны по истечении 30-летнего срока работы в этом университете.

Одновременно с работой в Сорбонне Э. Картан в 1910—1941 гг. был профессором математики в Парижской школе промышленной физики и химии.

В 1940 г. вышли статьи Картана «О теореме Я. А. Схоутена и В. ван дер Кулька» [170], «О линейных кватернионных группах» [171], «О се-

мействах изопараметрических гиперповерхностей в сферических пространствах пяти и девяти измерений» [172], «Об одном классе поверхностей, родственных поверхностям R и поверхностям Йонаса» [180].

В 1940 г. в Белграде Картан прочел лекцию «Роль Франции в развитии математики». Французский текст этой лекции [190] был опубликован только в 1992 г. Сербский перевод этой лекции был опубликован в 1940 г. в журнале «Сатурн» и в 1941 г. отдельной книгой. Предисловие к этой книге написал сербский математик Михайло Петрович (1868—1943), учившийся вместе с Картаном в Высшей Нормальной школе. Русский перевод этой речи приведен в Приложении 2.

В лекции дан краткий обзор трудов французских математиков от Франсуа Виета (1540—1603) и его ученика югослава Марина Геталдича (1556—1626), работавшего в Париже, до Жака Эрбрана (1908—1931), погибшего в горах через год после защиты докторской диссертации. По словам Картана, «его труды, грубо оборванные смертью, обещали великого математика, равного, быть может, Эваристу Галуа».

В 1942 г. вышла статья «О парах наложимых поверхностей с сохранением кривизн» [176] и была написана статья «Изотропные поверхности квадрики в пространстве семи измерений» [177] (опубликованная в 1995 г.). В этом же году Картан написал некролог [192] об итальянском геометре Туллио Леви-Чивита (1873—1941) и статью «К столетию Софуса Ли» [201]. Русский перевод этой статьи приведен в Приложении 3.

В 1943 г. были опубликованы статьи Картана «Об одном классе пространств Вейля» [178], «Поверхности, допускающие данную вторую фундаментальную форму» [179] и некролог о математике Жорже Жиро (1889—1943) [193].

В 1944 г. была переиздана статья [180].

В 1945 г. вышла книга «Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения» [181] и статья «Об одной задаче проективно-дифференциальной геометрии» [182].

В мае 1945 г. Картан участвовал в торжествах по случаю 220-летия Академии наук СССР в Москве.

В 1946 г. вышло новое издание [183] книги [114], в которую включены исследования римановых пространств с помощью подвижного репера. Была опубликована заметка «Некоторые замечания о 28 двойных касательных плоской квартики и о 27 прямых на кубической поверхности» [184].

В первой половине 1946 г. Э. Картан, заменяя заболевшего президента Парижской академии наук Мориса Коллери, председательствовал на еженедельных собраниях академии. В это время Кар-

тан опубликовал некрологи о французских академиках — руководителе Французской геодезической службы генерале Жорже Перье (1872—1946) [194], металлурге Леоне Гийе (1873—1946) [196], бактериологе Луи Мартене (1864—1946) [198], знаменитом физике Поле Ланжевене [199] и об иностранных членах академии — генетике Томасе Ханте Моргане (1866—1945) [195] и патологоанатоме Саймоне Флекснере (1863—1946) [197]. В том же году Картан написал статью к 80-летию своего друга Э. Вессио [200] и заметку [198a] к 200-летию со дня рождения математика Гаспара Монжа (1746—1818).

В 1947 г. была опубликована статья [185] о геометрии n-мерного конформного пространства и книга «Теория групп» [185a]. В 1948 г. вышла книга «Гаспар Монж: его жизнь и труды» [202], в которой впервые были опубликованы многие письма и документы Монжа.

В 1949 г. вышли две последние работы Картана — статья [186] о двух теоремах n-мерной конформной геометрии и статья «Жизнь и труды Жоржа Перье» [203].

После ухода из Сорбонны Картан преподавал математику в Высшей Нормальной школе для девушек.

Эли Картан умер в Париже 6 мая 1951 г. после тяжелой продолжительной болезни.

В 1952—1955 гг. было выпущено факсимильное издание [207] сочинений Картана в трех частях. В 1984 г. было выпущено второе издание [209] этого собрания сочинений, в конце которого были добавлены статьи Ш. Чжэня и К. Шевалле [ChC] и Дж. Уайтхеда [Wh], в которых дается анализ математического творчества Эли Картана.

Наиболее известными учениками Э. Картана были французские математики Андре Лихнерович (1915—1999) и Шарль Эресман (1905—1979). Сильное влияние Э. Картана испытал и Андре Вейль (1906—1998), он посвятил Картану свою книгу «Интегрирование на топологических группах» [Be]. В дополнение к статьям [ChC] и [Wh] о жизни и творчестве Картана следует отметить статьи Дьедонне [Di], Ходжа [Hod], Салтыкова [Сал] и Полетты Либерман [Lib2], а также статьи в сборнике [212], опубликованном румынскими математиками к 100-летию со дня рождения Картана, статьи Хокинса [Haw1], [Haw2], [Haw3] и его книгу [Haw4].

Семья Картана

Эли Картан и его жена Мари-Луиза имели четырех детей: математика Анри, композитора Жана, физика Луи и дочь Элен, которая, как отец и старший брат, стала математиком.

Рис. 1.9. Фотография семьи Картана в 1928 г. В первом ряду слева направо Луи, Элен, Жан, во втором ряду — в том же порядке Эли, Анри и Мари-Луиза Бьянкони-Картан

Анри Картан — один из крупнейших математиков XX века. Он окончил Высшую Нормальную школу в 1926 г. Преподавал математику в Кане, Лилле, Страсбурге, в 1936 г. стал профессором в Страсбурге, с 1940 г. — лектор факультета естественных наук Сорбонны, в 1949—1969 гг. — профессор того же факультета. В 1969—1975 гг. Анри Картан — профессор факультета естественных наук университета в южном пригороде Парижа Орсэ (ныне — Университет Париж-Юг).

С 1975 г. Анри Картан — почетный профессор этого университета.

В 1935 г. Анри Картан вместе с Жаном Дьедонне, Андре Вейлем, Жаном Фредериком Дельсартом (1903—1968) и Клодом Шевалле (1909—1984) основали математическую энциклопедию «Элементы математики», которая издавалась под общим псевдонимом «Никола Бурбаки» [Бу]. Анри Картан и его друзья работали в составе этой группы до своего 50 лет, после чего в коллектив пришли молодые математики. Этот коллективный труд оказал исключительное влияние на развитие всей мировой математики XX века.

В 1965 г. А. Картан был избран членом-корреспондентом Парижской академии наук, а в 1974 г. — академиком этой академии.

В 1967—1970 гг. А. Картан был президентом Международного математического союза.

В 1980 г. А. Картан вместе с Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903—1987) получил весьма престижную премию Вольфа по математике.

А. Картан — иностранный член многих академий наук, в том числе Лондонского королевского общества и Национальной академии наук США, и почетный доктор наук многих университетов.

А. Картан — автор многих книг и статей по теории аналитических функций, алгебраической топологии, гомологической алгебре и теории потенциала.

Наиболее известная из книг А. Картана — совместная с С. Эйленбергом монография «Гомологическая алгебра» [КаЭ].

Жан Картан окончил Парижскую консерваторию в 1931 г. и был композитором, автором двух струнных квартетов, сонатины для флейты и кларнета и сочинений для хора и оркестра. Жан умер в возрасте 25 лет от туберкулеза.

Луи Картан был талантливым физиком, специалистом по атомной энергии. Ученик Мориса де Бройля (1875—1960), Луи работал в Лаборатории физики рентгеновских лучей в Париже, а затем был профессором факультета естественных наук университета в Пуатье. Он написал две книг по ядерной физике. Во время Второй мировой войны Л. Картан активно участвовал в Сопротивлении. В 1942 г. он был арестован, вывезен в Германию и в 1943 г. казнен.

Э. Картан и его жена узнали о смерти сына только после окончания войны, эта трагедия сильно сократила их жизнь. Дочь Эли Картана Элен (1917—1952) была математиком, преподавала в различных лицеях и написала несколько научных работ.

У Э. Картана было 8 внуков: два сына и три дочери Анри и сын и две дочери Луи.

Картан и математики мира

Эли Картан побывал во многих странах и был связан дружбой с математиками этих стран. В 1920, 1924, 1928, 1932 и 1936 гг. Картан выступал с докладами на Международных математических конгрессах в Страсбурге, Торонто, Болонье, Цюрихе и Осло. В 1939 г. Картан участвовал в математическом конгрессе в Льеже. В 1940 г. Картан прочел в Белграде лекцию о роли французских математиков в истории мировой математики.

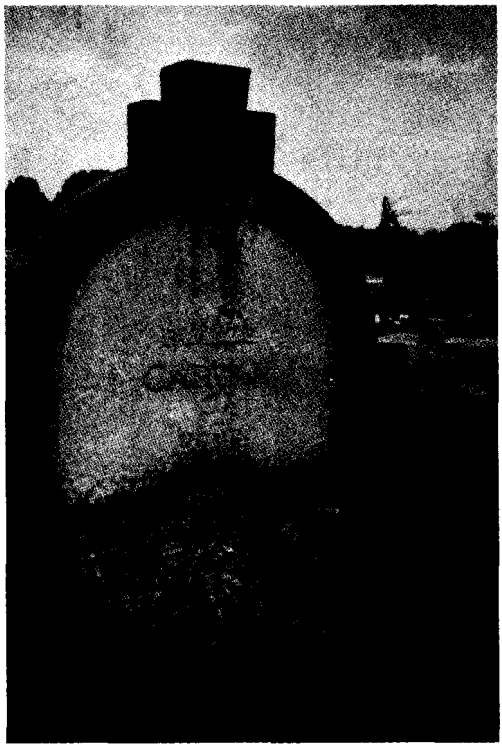


Рис. 1.10. Надгробная плита могилы Эли Картана, его жены, сына Жана и дочери Элен на кладбище в Доломье

Математики многих стран сформировались под влиянием Картана. Немецкий математик Эрнст Август Вейсс (1900—1942), ученик Э. Штуди, провел у Картана два семестра, работая над развитием его идеи о принципе тройственности. Многие работы Ш. Чжэня (1911—2004), ученика Вильгельма Бляшке, также написаны под влиянием Картана.

В апреле—мае 1931 г. Э. Картан посетил Румынию и Польшу. В Румынии он читал лекции в Клуже, Бухаресте, Яссах и Черновцах. В том же году Картан был избран почетным членом-корреспондентом Румынской академии наук в Бухаресте. В 1934 г. Картан был избран членом-корреспондентом Королевского научного общества в Льеже, в 1937 г. — иностранным членом Амстердамской академии наук, в 1949 г. — иностранным членом Национальной академии наук США и членом «Национальной академии сорока» в Риме. Картан был также избран почетным док-

Рис. 1.11. Группа участников конгресса в Цюрихе. Слева направо: Фердинанд Гонсет, Эли Картан, Гюстав Жюве, Гастон Жюлиа, г-жа Жюлиа и г-жа Гонсет

тором наук Гарвардского университета в США (1936) и университетов в Льеже (1939), Брюсселе и Лёвене (1947), Бухаресте и Пизе (1948).

Э. Картан находился в научной переписке со многими учеными, однако из многочисленных писем Картана к настоящему времени опубликована только его переписка с А. Эйнштейном [211] и с румынскими геометрами Георге Цицейкой, Александру Пантази и Георге Врынчяну [210].

Картан находился в тесной дружбе со многими геометрами нашей страны. В 1926—1927 гг. курс лекций Картана в Париже слушал Сергей Павлович Фиников (1883—1964), который впоследствии основал советскую дифференциально-геометрическую школу, применявшую метод внешних форм и подвижного репера. В 1927—1928 гг. в Сорбонне под руководством Картана подготовил и защитил докторскую диссертацию «О непрерывных семействах геометрических фигур» Георгий Николаевич Николадзе (1888—1931), преподававший математику в Тбилисском университете и основавший грузинскую геометрическую школу. Картан дружил также с Вениамином Федоровичем Каганом — основателем советской тензорной дифференциально-геометрической школы.

Рис. 1.12. Группа участников конгресса в Осло. Слева направо: Джордж Дэвид Биркгоф, Эли Картан и Константин Каратеодори

Рис. 1.13. Группа математиков в Париже в 1935 г. В первом ряду слева направо: Эмиль Артин, Гастон Жюлиа, Франческо Севери и Эли Картан

Рис. 1.14. Э. Картан (слева) беседует с казанскими математиками П. А. Широковым (в центре) и Н. Г. Чеботаревым (справа). 1934 г.

Несколько работ Картана были впервые напечатаны в СССР: [106] и [177] — в Казани, [127] — в Харькове, [108], [108a], [144], [152], [153], [154], [180] — в Москве.

В 1937 г. на VIII Международном конкурсе на премию Н. И. Лобачевского в Казани первая премия была присуждена Эли Картану за его работы по геометрии.

В СССР вышли в русских переводах 7 книг Э. Картана [64], [108a], [114], [144], [157], [164], [181], сборник [205], содержащий статьи [88], [105], [140], сборник «Геометрия групп Ли и симметрические пространства» [206], содержащий статьи [93], [94], [101], [103], [116], [128], и сборник «Пространства аффинной, проективной и конформной связности» [208], содержащий статьи [66], [68], [70], [80]. Доклады Э. Картана [152], [153], [154] были опубликованы также в русских переводах.

Метод внешних форм Э. Картана был развит С. П. Фиников в книге [Фин]. Этот метод применялся при решении большого числа задач дифференциальной геометрии С. П. Фиников и его многочисленными учениками и последователями.

Теория римановых пространств и пространств аффинной связности получила значительное развитие в работах В. Ф. Кагана, П. А. Широкова

и их учеников. Во время первых двух приездов Э. Картана в СССР авторы этой книги были школьниками. Во время третьего приезда Картана в мае 1945 г. авторы служили в Советской Армии. Б. А. Розенфельду посчастливилось увидеть Картана и побеседовать с ним о своих работах. Несомненно, что, беседуя с молодым московским математиком в форме сержанта, Картан вспомнил, как он, сержант французской армии, беседовал с приехавшим в Париж Софусом Ли. После беседы Э. Картан вручил автору свою визитную карточку с надписью «Я заинтересовался работами г. Розенфельда».

Научная деятельность обоих авторов относится к развитию идей Картана: М. А. Акивиса — в области проективно-дифференциальной и конформно-дифференциальной геометрии и в других областях дифференциальной геометрии, Б. А. Розенфельда — в области геометрии групп Ли и симметрических пространств.

Глава 2

Группы Ли и алгебры

Группы

70-е годы XIX в. — время детства Эли Картана — были переломными годами и в истории Франции, и в мировой истории. В 1870 г., после поражения в войне с Пруссией, пала империя Наполеона III, и Франция снова стала республикой. В это время во всех развитых странах начался период новой промышленной революции.

В эти годы начался новый период и в математике: были осознаны два замечательных открытия, сделанные в первой половине века — открытие теории групп Эваристом Галуа и открытие неевклидовой геометрии Лобачевским. Смысл этих открытий, сделанных независимо друг от друга, по существу был очень близок. Если до Галуа считалось, что существует единственная арифметика вещественных и комплексных чисел, то Галуа показал, что имеется много арифметик, определяемых различными группами и полями. До Лобачевского считалось, что есть только одна геометрия Евклида, а Лобачевский построил новую геометрию, во многом отличающуюся от евклидовой.

Наряду с группами и полями Галуа, в XIX в. появились новые числовые системы — системы гиперкомплексных чисел (алгебры), общая теория которых была создана в 70-х годах.

Наряду с геометрией Лобачевского в XIX в. получили значительное развитие и другие геометрии — аффинная, проективная, многомерная, появилась риманова геометрия — геометрия многомерных искривленных пространств.

Теория групп, алгебр, неевклидовы и другие геометрии играли важную роль в творчестве Э. Картана.

В середине 70-х годов было сделано еще одно важное математическое открытие — теория множеств Г. Кантора. Эта теория и основанная на ней теория функций вещественного переменного, ставшие главным предметом исследований французских математиков конца XIX и начала XX вв., первоначально не отразились на творчестве Э. Картана.

Эварист Галуа (1811—1832) был студентом Высшей Нормальной школы, в которой впоследствии учился Э. Картан. К открытию Галуа привела проблема разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Если дано алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2.1}$$

коэффициенты a_i которого — рациональные или вещественные числа, то значения x, обращающие это уравнение в тождество, называются корнями этого уравнения. В случае квадратных уравнений ($n = 2$) корни x_1, x_2 выражаются через коэффициенты a_0, a_1, a_2 по общеизвестным формулам, установленным Мухаммедом аль-Хорезми (ок. 780 — ок. 850); эти формулы содержат квадратные радикалы. Аналогичную формулу для кубического уравнения ($n = 3$) нашли Никколо Тарталья (ок. 1500—1557) и Джероламо Кардано (1501—1576), а для случая $n = 4$ — Луиджи Феррари (1522—1565).

В течение нескольких столетий математики пытались найти формулу, выражающую корни уравнения (2.1) при $n > 4$ через коэффициенты этого уравнения. Но задача решалась только для простейших частных случаев такого уравнения, например, для «двучленных уравнений» $x^n = a$, один из корней которого выражается радикалом $\sqrt[n]{a}$, а остальные являются произведениями этого корня на степени комплексного числа, имеющего единичный модуль и аргумент $2\pi/n$.

В 1829 г. Нильс Хенрик Абель (1802—1829) в работе «Доказательство невозможности алгебраического решения общих уравнений степени выше четвертой» [Ab] выделил класс уравнений, разрешимых в радикалах, более широкий, чем класс двучленных уравнений. Галуа в «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» [Гал] дал полное решение этой проблемы, основанное на введенном им понятии группы. Это понятие в неявном виде применялось в «Размышлении о решении уравнений» [Lag1] Жозефом Луи Лагранжем (1736—1815) и в «Арифметических исследованиях» [Гау1] Карлом Фридрихом Гауссом (1777—1855).

Во многих областях математики встречаются такие операции над объектами, которые каждой паре объектов из некоторой их совокупности ставят в соответствие какой-нибудь объект этой совокупности. Такими операциями являются сложение чисел, векторов или матриц, умножение чисел или матриц и последовательное выполнение преобразований. Это общее понятие было создано Галуа, который называл такие операции «группировками», откуда и произошел введенный им термин «группа».

В настоящее время *группой* называется множество элементов a, b, c, ... любой природы, удовлетворяющее следующим условиям.

1) Всяким двум элементам a и b ставится в соответствие элемент $c = a \cdot b$. Операция $a \cdot b$ называется *групповой операцией*.

2) Групповая операция *ассоциативна*, т. е. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3) В группе существует *нейтральный элемент* e, для которого $a \cdot e = e \cdot a = a$ при любом a.

4) Для всякого элемента a существует элемент a' такой, что $a \cdot a' = a' \cdot a = e$. Такой элемент называется *обратным* к элементу a.

5) В случае, если групповая операция коммутативна, т. е. $a \cdot b = b \cdot a$, группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

В случае целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел и операции сложения нейтральным элементом является 0, а обратным для числа a — противоположное число $-a$. В случае трех последних видов чисел эти числа без 0 образуют группы по умножению. Нейтральным элементом в этих случаях является 1, а обратным для числа a — число $1/a$. Все эти группы коммутативны.

Векторы и прямоугольные матрицы с m строками и n столбцами образуют коммутативные группы по сложению. Нейтральными элементами этих групп являются нулевой вектор и нулевая матрица, обратными элементами для вектора $\boldsymbol{a}$ и матрицы A являются вектор $-\boldsymbol{a}$ и матрица $-A$.

Невырожденные квадратные матрицы n-го порядка (т. е. матрицы с ненулевыми определителями) образуют некоммутативную группу по умножению. Нейтральным элементом этой группы является единичная матрица, а обратным элементом для матрицы A является обратная матрица A^{-1}.

Некоммутативными группами являются также группы подстановок, т. е. группы произвольных преобразований множеств, состоящих из конечного числа n элементов. Нейтральными элементами этих групп являются тождественные подстановки.

Конечными коммутативными группами являются группы чисел $\{0, 1, \ldots, q-1\}$, где q — произвольное натуральное число, со сложением по модулю q, т. е. в том случае, когда $a + b > q - 1$, за сумму чисел a и b принимается остаток от деления $a + b$ на q, и группы чисел $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, где p — простое число, с умножением по модулю p, т. е. в том случае, когда $ab > p - 1$, за произведение чисел a и b принимается остаток от деления ab на p.

Подмножество H элементов группы G, замкнутое относительно групповой операции, называется *подгруппой* группы G. В этом случае произведения aH и Ha элементов подгруппы H на произвольный элемент a

группы G называются *левыми* и *правыми смежными классами* подгруппы H. В том случае, когда всякий левый смежный класс aH является правым смежным классом Hb, H называется *инвариантной подгруппой*, или *нормальным делителем* группы G. В этом случае можно определить умножение смежных классов. Смежные классы с этим умножением образуют группу G/H, называемую *факторгруппой* группы G по ее инвариантной подгруппе H.

Две группы называются *изоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее групповую операцию. Если между двумя группами можно установить однозначное, но не взаимно однозначное соответствие, сохраняющее групповую операцию, группы называются *гомоморфными*. Если группа G гомоморфна группе H, то элементы группы G, соответствующие нейтральному элементу группы H, образуют инвариантную подгруппу N группы G, и группа H изоморфна факторгруппе G/N.

Особую роль в теории групп играют *простые группы* — группы, не имеющие инвариантных подгрупп, кроме самой группы и ее нейтрального элемента.

В случае, когда в группе G имеется такая цепочка подгрупп $G = G_0 \supset \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k = e$, что каждая подгруппа G_{i+1} является инвариантной подгруппой подгруппы G_i и все факторгруппы G_i/G_{i+1} абелевы, группа G называется *разрешимой*.

Кроме понятия группы, Галуа ввел понятие *поля*: поле представляет собой коммутативную группу по сложению, а элементы этой группы, отличные от 0, образуют коммутативную группу по умножению, причем умножение *дистрибутивно* относительно сложения, т. е. $a(b + c) = = ab + ac$. Рациональные, вещественные и комплексные числа ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), а также кольцо вычетов $\mathbb{F}_p$ по простому модулю p, состоящее из чисел $0, 1, 2, \ldots, p - 1$ со сложением и умножением по модулю p, являются полями.

Галуа определил и наиболее общие конечные поля, называемые в настоящее время *полями Галуа*. Поле Галуа $\mathbb{F}_q$ состоит из q элементов, где q является k-й степенью простого числа p, $q = p^k$. Подобно тому, как поле $\mathbb{C}$ состоит из элементов $a + bi$, где a, b — элементы поля $\mathbb{R}$, а i — «мнимая единица», т. е. корень неприводимого уравнения $x^2 + 1 = 0$, поле $\mathbb{F}_q$ состоит из элементов $a_0 + \sum i_b a_b$, где a_b — элементы поля $\mathbb{F}_p$, а i_b — «мнимости Галуа», т. е. корни неприводимого алгебраического уравнения k-й степени с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_p$.

Аналогичное расширение полей, определяемое алгебраическими уравнениями, играет важную роль в теории Галуа. С каждым расширением L

поля K Галуа связывал группу, называемую в настоящее время *группой Галуа* расширения L поля K. Эта группа состоит из всех автоморфизмов поля L, т. е. преобразований этого поля, сохраняющих операции сложения и умножения, которые оставляют неподвижными все элементы поля K. Со всяким алгебраическим уравнением (2.1) связаны поле K, порождаемое коэффициентами этого уравнения, и поле L, порождаемое его корнями. В этом случае группа Галуа расширения L поля K называется *группой Галуа уравнения* (2.1). Эта группа — конечная группа, которая в общем случае совпадает с группой перестановок корней уравнения (2.1).

Критерий Галуа разрешимости алгебраического уравнения (2.1) в радикалах состоит в том, что группа Галуа этого уравнения должна быть разрешимой. Это объясняет термин «разрешимая группа».

В случае двучленного уравнения $x^n = a$ эта группа является циклической группой, т. е. изоморфна группе поворотов окружности на углы, кратные углу $2\pi/n$.

В случае уравнений, рассматривавшихся Абелем, группа Галуа — коммутативная (абелева) группа. Это объясняет название «абелева группа». Циклические и все коммутативные группы являются частными случаями разрешимых групп.

Мемуар Галуа [Гал], написанный им в ночь перед роковой дуэлью, был опубликован его другом в малоизвестном издании, а в 1846 г. издан Жозефом Лиувиллем (1809—1882) в его журнале.

Идеи Галуа получили признание лишь после того, как Камилл Жордан (1838—1922) опубликовал в 1865 и 1869 гг. комментарии к мемуару Галуа, а в 1870 г. выпустил фундаментальный «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» [Jo1], в котором изложил теорию групп подстановок, теорию Галуа и ее приложение к проблеме решения алгебраических уравнений в радикалах.

Группы и алгебры Ли

Незадолго до франко-прусской войны Софус Ли и Феликс Клейн (1849—1925), тогда молодые математики, побывали во Франции. В Париже они слушали лекции Г. Дарбу и беседовали с Жорданом, который познакомил их со своей книгой [Jo1]. В этой книге рассматривались конечные и дискретные группы, но Ли и Клейн, первые работы которых относились к геометрии, заинтересовались непрерывными группами и их значением для геометрии.

Непрерывными группами являются такие группы преобразований геометрических пространств, как группы движений евклидова и неевклидовых пространств, группы вращений этих пространств вокруг точ-

ки, группа переносов евклидова пространства, группа подобий этого же пространства, группа аффинных преобразований, группы коллинеаций и более общих проективных преобразований. Группы вращений и переносов являются подгруппами группы движений евклидова пространства, причем группа переносов — инвариантная подгруппа. Группа движений — подгруппа группы подобий, группа подобий — подгруппа группы аффинных преобразований, а эта последняя группа — подгруппа группы коллинеаций.

В 1871 г. Клейн построил знаменитую проективную интерпретацию [Кле1] геометрии Лобачевского и доказал, что группа движений пространства Лобачевского также является подгруппой группы коллинеаций. В 1872 г. Клейн опубликовал свою «Эрлангенскую программу» [Кле2], согласно которой всякая геометрия определяется некоторой группой преобразований и задача каждой геометрии состоит в изучении инвариантов ее группы преобразований.

Когда началась франко-прусская война, Клейн вернулся в Германию, а Ли остался во Франции. Во время войны Ли был арестован по подозрению, что он прусский шпион. Но парижским математикам удалось добиться его освобождения.

В Париже Софус Ли написал работу «О комплексах, в особенности о комплексах прямых и сфер, с применением к теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка» [Lie1]. Эта работа была посвящена разделу геометрии, который Ф. Клейн называл «высшей геометрией сфер Ли». В настоящее время этот раздел называется *контактной геометрией*. Ли рассматривал сферы трехмерного евклидова пространства, считая точки сферами нулевого радиуса, а плоскости — сферами бесконечного радиуса. Преобразования многообразия этих сфер, сохраняющие их касание, в настоящее время называются *контактными преобразованиями*. Ли показал, что рассматриваемые им сферы изображаются точками четырехмерной гиперквадрики (гиперповерхности второго порядка) в пятимерном проективном пространстве, причем левая часть уравнения этой гиперквадрики является квадратичной формой 6 переменных с сигнатурой $+++++--$ (т. е. приводится к алгебраической сумме 4 положительных и 2 отрицательных квадратов). Контактные преобразования образуют группу, изображаемую группой коллинеаций пятимерного пространства, переводящих в себя эту гиперквадрику.

С. Ли сравнивал многообразие сфер с многообразием прямых трехмерного проективного пространства, которые в силу интерпретации Плюккера изображаются точками гиперквадрики в пятимерном проек-

тивном пространстве, левая часть уравнения которой является квадратичной формой с сигнатурой $+++---$. Это сравнение привело Ли к мнимому преобразованию, переводящему одну гиперквадрику в другую, а сферы — в прямые.

Полученные геометрические результаты С. Ли применил к теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В Париже Ли познакомился с работой Жоржа Альфана (1844—1889) «Приведение линейного дифференциального уравнения к интегрируемым формам» [Hal]. Эта работа получила премию Парижской академии наук в 1881 г. В работе Альфана рассматривалась проблема интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах, т. е. проблема выражения решений этих уравнений с помощью интегралов от известных функций.

Этой проблеме была посвящена статья С. Ли «Классификация и интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу преобразований» [Lie2], опубликованная в 1883—1884 гг. С. Ли подошел к решению этой проблемы по аналогии с тем, как Галуа рассматривал разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. С каждым обыкновенным дифференциальным уравнением С. Ли связывал непрерывную группу преобразований, «допускаемую этим уравнением», и определял условия, которым должна удовлетворять эта группа для того, чтобы решение уравнения можно было выразить в квадратурах. Оказалось, что это условие, так же как и условие Галуа, состоит в том, что группа, допускаемая дифференциальным уравнением, должна быть разрешимой. Поэтому разрешимые непрерывные группы иногда называют *интегрируемыми* группами.

Для обоснования этой теории было необходимо подробно изложить основные свойства непрерывных групп преобразований и, в частности, разрешимых и простых непрерывных групп. Эта задача была выполнена С. Ли совместно с Фридрихом Энгелем (1861—1941) в трехтомной монографии «Теория групп преобразований» [LiE], опубликованной в 1888—1893 гг. В этой монографии рассматриваются преобразования вида

$$'x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \tag{2.2}$$

где $'x_i$ и x_i — координаты точек, a_u — параметры группы, а f_i — вещественные или комплексные аналитические функции. При этом параметры a_u, b_u, c_u, определяющие два преобразования и их произведение (результат их последовательного выполнения), связаны соотношениями

$$c_u = \varphi_u(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r), \tag{2.3}$$

определяющими групповую операцию.

Параметры a_u выбираются таким образом, что значения $a_u = 0$ соответствуют тождественному преобразованию $'x_i = x_i$. Число r называется *размерностью* непрерывной группы.

Простыми непрерывными группами называются такие непрерывные группы, которые не имеют непрерывных инвариантных подгрупп меньшей размерности.

С. Ли определил также «бесконечно малые преобразования», т. е. преобразования, бесконечно близкие к тождественному преобразованию $'x_i = x_i$. Эти преобразования имеют вид

$$'x_i = x_i + dx_i = x_i + \sum_u (D_u x_i)\, da_u, \tag{2.4}$$

где D_u — оператор частного дифференцирования по параметру a_u.

С. Ли задавал непрерывные группы дифференциальными операторами D_u, выраженными через координаты x_i и операторы X_i частного дифференцирования по координатам x_i.

В частности, в случае группы переносов n-мерного евклидова пространства R^n имеем

$$'x_i = x_i + a_i, \tag{2.5}$$

$r = n$, и операторы D_u могут быть записаны в виде D_i, причем $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} = X_i$.

В случае группы вращений пространства R^n

$$'x_i = \sum_j U_{ij} x_j, \tag{2.6}$$

где (U_{ij}) — ортогональная матрица n-го порядка. Так как матрица (U_{ij}) зависит от $n(n-1)/2$ вещественных параметров, в этом случае $r = n(n-1)/2$, и операторы D_u можно записать в виде D_{ij}, где $i < j$. Эти операторы имеют вид $D_{ij} = x_i X_j - x_j X_i$.

В случае группы движений пространства R^n, состоящей из переносов (2.5) и вращений (2.6), $r = n(n+1)/2$, и операторы D_u могут быть записаны в виде D_i и D_{ij}, где $i < j$. Эти операторы имеют вид $D_i = X_i$ и $D_{ij} = x_i X_j - x_j X_i$.

С. Ли для случая плоскости R^2 записывал координаты x_i буквами x и y, а дифференциальные операторы X_i — буквами p и q, и поэтому он записывал операторы D_u группы переносов в виде p и q, группы вращений — в виде $xq - yp$, а группы движений — в виде p, q и $xq - yp$.

Для операторов D_u и D_v непрерывной группы преобразований определяется операция *скобки Пуассона*

$$[D_u D_v] = D_u(D_v) - D_v(D_u), \tag{2.7}$$

обладающая свойствами антикоммутативности

$$[D_u D_v] = -[D_v D_u] \tag{2.8}$$

и удовлетворяющая *тождеству Якоби*

$$[D_u[D_v D_w]] + [D_v[D_w D_u]] + [D_w[D_u D_v]] = 0. \tag{2.9}$$

Скобки Пуассона и тождество Якоби были определены Симеоном Дени Пуассоном (1781—1840) и Карлом Густавом Якобом Якоби (1804—1851) в их работах по теории дифференциальных уравнений.

Скобка $[D_u D_v]$ является линейной комбинацией операторов D_w:

$$[D_u D_v] = \sum_w C_{uvw} D_w. \tag{2.10}$$

Коэффициенты C_{uvw} — постоянные, называемые *структурными константами*. С. Ли назвал совокупность операторов D_u с операцией (2.7) «инфинитезимальной группой» и доказал, что задание инфинитезимальной группы вполне определяет группу преобразований (2.2) в некоторой окрестности тождественного преобразования, причем функции (2.2) находятся как решения некоторой системы дифференциальных уравнений.

Из равенства (2.4) вытекает, что дифференциальный оператор $\frac{d}{dt}$ можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} = \sum_u \left(\frac{da_u}{dt}\right) D_u. \tag{2.11}$$

В настоящее время группы Ли рассматриваются независимо от их представлений в виде групп преобразований того или иного пространства, как многообразие элементов с координатами a_u и групповой операцией (2.3). Соотношение (2.11) показывает, что вместо операторов D_u можно рассматривать касательные векторы к однопараметрическим подгруппам

$$a(t_1 + t_2) = a(t_1)a(t_2) \tag{2.12}$$

в нейтральном элементе группы, т. е. при $t = 0$.

Если подгруппам $a(t)$ и $b(t)$ соответствуют векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, то произведению $a(t)b(t)$ соответствует сумма векторов $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}$, а произведению $a(s)b(t)a^{-1}(s)b^{-1}(t)$ соответствует «коммутатор» $[\boldsymbol{ef}]$, обладающий свойством антикоммутативности

$$[\boldsymbol{ef}] = -[\boldsymbol{fe}] \tag{2.13}$$

и удовлетворяющий тождеству Якоби

$$[e[fg]] + [f[ge]] + [g[ef]] = 0. \tag{2.14}$$

Свойства (2.13) и (2.14) аналогичны свойствам (2.8) и (2.9) операторов D_u. Определенная таким образом «инфинитезимальная группа» представляет собой векторное пространство с операциями сложения и коммутирования векторов. Так как векторные пространства с операциями сложения и умножения векторов в настоящее время называются *алгебрами*, Г. Вейль в работе 1935 г. «Структура и представления непрерывных групп» [Wey3] предложил инфинитезимальные группы называть «алгебрами Ли». Этот термин является в настоящее время общепринятым.

Две группы Ли, определяющие одну и ту же алгебру Ли, обладают изоморфными окрестностями нейтральных элементов и называются *локально изоморфными* группами Ли.

В случае, если группа Ли является группой матриц U по умножению, соответствующая ей алгебра Ли состоит из производных $A = \frac{dU}{dt}$ в нейтральном элементе группы. Коммутатор $[AB]$ двух матриц связан с их обычным произведением соотношением $[AB] = AB - BA$.

В случае, когда группа Ли состоит из ортогональных матриц $U = (U_{ij})$, удовлетворяющих условию

$$U^T U = 1, \tag{2.15}$$

где T — знак транспонирования матрицы, дифференцируя соотношение (2.15) при $U = 1$, мы получим

$$A^T + A = 0, \tag{2.16}$$

т. е. алгебра Ли группы ортогональных матриц состоит из кососимметрических матриц ($A_{ij} = -A_{ji}$).

Работы Киллинга

Вильгельм Киллинг, изучение работы которого [Kil2] определило содержание диссертации Э. Картана, был учеником Карла Вейерштрасса (1815—1897). Докторская диссертация Киллинга, защищенная в Берлине в 1872 г., была посвящена классификации пар квадрик (поверхностей второго порядка) в трехмерном проективном пространстве. Эта классификация была основана на созданной Вейерштрассом теории элементарных делителей и нормальных форм матриц, которую Киллинг применил к матрицам коллинеаций, являющихся произведениями полярных преобразований относительно квадрик.

После защиты Вейерштрасс рекомендовал Киллинга на должность профессора математики в Госианский лицей в г. Браунсберге в Восточной Пруссии, в той ее части, которая раньше входила в состав Польши. В настоящее время этому городу возвращено его польское название Бранево. Лицей был основан в 1565 г. польским епископом Станиславом Госинским и предназначался для подготовки католических священников. Киллинг был ревностным католиком и в Браунсберге вступил в духовный орден терциариев.

По совету Вейерштрасса Киллинг занялся проблемой пространственных форм, продолжая исследования Ф. Клейна и Вильяма Кингдона Клиффорда (1845—1879). Эта проблема привела Киллинга к рассмотрению бесконечно малых движений, и в 1884 г. он опубликовал в Браунсберге статью «Расширение понятия пространства» [Kil1], в которой, независимо от С. Ли, пришел к понятиям группы Ли и алгебры Ли и поставил задачу классификации простых групп Ли. Эту статью Киллинг послал Клейну, который сообщил ему, что аналогичными вопросами занимается его друг Софус Ли, и дал его адрес в Норвегии. По просьбе Киллинга Ли прислал ему оттиски своих работ, которые следовало вернуть автору. Киллинг нашел в этих статьях понятия «конечной непрерывной группы» и «инфинитезимальной группы», а также бесконечные серии простых групп Ли. Однако С. Ли не ставил перед собой задачу определения всех простых групп Ли, которую пытался решить Киллинг. *Убедившись в этом, Киллинг вернул С. Ли его статьи. Столь быстрое* возвращение статей обидело Ли, и его отношения с Киллингом были навсегда испорчены.

Киллинг завязал переписку с Ф. Энгелем, который помог ему опубликовать статью [Kil2] в Лейпциге. После того как в этой статье были обнаружены ошибочные утверждения о «группах нулевого ранга», Энгель посоветовал Киллингу поручить исправление этой ошибки одному из его учеников, но у Киллинга в Браунсберге не было учеников-математиков, и Энгель поручил решение этой задачи своему ученику Умлауфу.

В работе [Kil2] Киллинг решал задачу классификации комплексных простых групп Ли, гораздо менее сложную, чем классификация вещественных простых групп Ли, которая была необходима для решения проблемы вещественных пространственных форм. В этой работе Киллинг применил теорию собственных значений матриц и показал, что кроме известных С. Ли бесконечных серий таких групп имеются также особые простые группы размерностей 14, 52, 78, 133 и 248.

С. Ли были известны бесконечные серии вещественных и комплексных простых групп Ли. Это — группы вещественных и комплексных мат-

риц n-го порядка с определителем 1, группы вещественных и комплексных ортогональных матриц n-го порядка, т. е. матриц, удовлетворяющих условию (2.15), также с определителем 1, и группы вещественных и комплексных матриц $2n$-го порядка, называемые комплекс-группами, матрицы которых удовлетворяют условию

$$U^T J U = J, \tag{2.17}$$

где J — кососимметрическая матрица $2n$-го порядка, все элементы верхней половины побочной диагонали которой равны 1, все элементы нижней половины этой диагонали равны -1, а все остальные элементы равны 0.

Матрицы первой из этих серий являются матрицами коллинеаций проективного пространства P^{n-1} или $\mathbb{C}P^{n-1}$. Матрицы второй из этих серий — матрицы коллинеаций тех же пространств, переводящих в себя гиперквадрики. Матрицы третьей из этих серий — матрицы коллинеаций пространств P^{2n-1} и $\mathbb{C}P^{2n-1}$, переводящие в себя линейные комплексы прямых этих пространств.

Последнее из этих пространств в настоящее время называется комплексным *симплектическим пространством*. Этот термин появился после того, как Г. Вейль начал читать лекции о простых группах Ли в США на английском языке, в котором выражения «комплекс-группа» и «комплексная группа» совпадают. Для того чтобы не путать эти понятия, Вейль предложил [Вей2] заменить термин «комплекс-группа» выражением «симплектическая группа» от греческого слова symplektikos, являющегося переводом латинского слова complexus.

В настоящее время группы первой из этих серий обозначаются SL_n и $\mathbb{C}SL_n$, группы второй серии обозначаются SO_n и $\mathbb{C}SO_n$, группы третьей серии обозначаются Sp_{2n} и $\mathbb{C}Sp_{2n}$.

Киллинг рассмотрел задачу о собственных значениях линейного оператора p, порождаемого в инфинитезимальной группе ее фиксированным элементом $\sum\limits_u h_u X_u$. Действие этого оператора на произвольный элемент инфинитезимальной группы $X = \sum\limits_v a_v X_v$ имеет вид

$$\left[\sum_u h_u X_u,\ X\right] = \left[\sum_u h_u X_u,\ \sum_v a_v X_v\right] = \sum_u \sum_v \sum_w c_{uvw} h_u a_v X_w. \tag{2.18}$$

Если оператор X является собственным вектором этого линейного преобразования, соответствующим собственному значению ω, то имеет место соотношение

$$\sum_u \sum_v c_{uvw} h_u a_v = \omega a_w.$$

Поэтому собственное значение ω является корнем уравнения

$$\Delta(\omega) = \det\Big(\sum_u c_{uvw} h_u - \omega\delta_{vw}\Big) = 0, \tag{2.19}$$

где δ_{vw} — символ Кронекера, равный 1 при $v = w$ и 0 при неравных v и w. Уравнение (2.19) называется *характеристическим уравнением* группы Ли. Это уравнение можно переписать в виде

$$\omega^r - \psi_1\omega^{r-1} + \psi_2\omega^{r-2} - \ldots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}\omega + (-1)^r\psi_r = 0, \tag{2.20}$$

где ψ_u — однородные функции параметров h_u:

$$\psi_1 = \sum_u \sum_v c_{uvv} h_u,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\sum_u \sum_v \Big(\sum_w c_{uww} \sum_x c_{vxx} - \sum_x c_{uxw} \sum_w c_{vwx}\Big) h_u h_v,$$

. . . . . .

Формы ψ_u, являющиеся коэффициентами характеристического уравнения группы Ли, называются *формами Киллинга*.

Число функционально независимых коэффициентов ψ_u Киллинг назвал *рангом* группы. Для групп $\mathbb{C}SL_{n+1}$, $\mathbb{C}SO_{2n+1}$, $\mathbb{C}Sp_{2n}$ и $\mathbb{C}SO_{2n}$ ранг равен n.

Киллинг заметил, что один и тот же оператор X является собственным вектором для всех матриц линейных преобразований (2.18), соответствующих операторам $\sum_u h_u X_u$ из подгруппы нулевого ранга, содержащей инфинитезимальное преобразование общего вида. Доказательство Киллинга этого факта, основанное на свойствах подгрупп нулевого ранга, содержало изъян. Считая свое доказательство правильным, Киллинг пришел к выводу, что характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\prod_u (\omega - \alpha_u(h)) = 0, \tag{2.21}$$

где $\alpha_u(h)$ — корни характеристического уравнения, являющиеся линейными функциями координат h_i бесконечно малого преобразования $\sum h_i X_i$, причем X_i — базисные бесконечно малые преобразования подгруппы нулевого ранга.

Рассматривая все возможные комбинации корней $\alpha_u(h)$, Киллинг провел классификацию инфинитезимальных групп комплексных простых групп Ли.

Он обозначал найденные им инфинитезимальные группы римскими цифрами, равными рангам групп, и одной из букв A, B, C, D, E, F. Те же обозначения Киллинг применял и к самим комплексным простым группам Ли, соответствующим этим инфинитезимальным группам. Группы класса A начинаются с группы IA, группы классов B и C начинаются с групп IIB и IIC, группы класса D начинаются с группы IVD, в классе E были группы IVE, VIE, VIIE и VIIIE, в классе F — группа IVF. Группы $\mathbb{C}SL_{n+1}$ Киллинг называл простыми группами класса A, группы $\mathbb{C}SO_{2n+1}$ — простыми группами класса B, группы $\mathbb{C}Sp_{2n}$ — простыми группами класса C, а группы $\mathbb{C}SO_{2n}$ — простыми группами класса D.

В классификации Киллинга не было групп IB, IC и ID, так как Киллинг нашел, что группа $\mathbb{C}SO_3$ локально изоморфна группе $\mathbb{C}SL_2$, а группа $\mathbb{C}Sp_2$ совпадает с группой $\mathbb{C}SL_2$. Группу $\mathbb{C}SO_2$, являющуюся одномерной и коммутативной, Киллинг в свою классификацию не включил. Он нашел также, что группа $\mathbb{C}Sp_4$ локально изоморфна группе $\mathbb{C}SO_5$, поэтому обозначение IIC он применил не для группы $\mathbb{C}Sp_4$, размерность которой равна 10, а для открытой им особой простой группы, размерность которой равна 14. Киллинг доказал, что группа $\mathbb{C}SO_4$ локально изоморфна прямому произведению двух групп $\mathbb{C}SO_3$ и поэтому не является простой группой Ли. Он доказал, что группа $\mathbb{C}SO_3$ локально изоморфна группе $\mathbb{C}SL_2$. Киллинг доказал, что размерности особых групп IVE, VIE, VIIE и VIIIE равны соответственно 52, 78, 133, 248, а размерность группы IVF равна 52. Таким образом, Киллинг считал, что имеются две различные простые группы ранга IV и размерности 52.

Киллинг заметил, что многими свойствами простых групп Ли обладают группы, локально изоморфные прямым произведениям простых групп, которые он назвал *полупростыми* группами. Фактически под полупростыми группами Киллинг всегда имел в виду группы, локально изоморфные прямым произведениям некоммутативных простых групп Ли.

Диссертация Картана

В заметке [1] Картан, отметив «исключительно важные результаты» работы Киллинга [Kil2], писал, что, «к сожалению, в соображениях, которые привели Киллинга к этим результатам, отсутствует строгость. Поэтому желательно проделать это исследование снова, указав те его теоремы, которые неточны, и доказать те его теоремы, которые правильны» [1, с. 784—785]. Эта работа была проделана Картаном в его диссертации [5]. Исследование проведено Картаном для тех групп Ли, которые он называл термином Киллинга «полупростые группы», но определял более точно как группы Ли, не обладающие разрешимыми инвариантными подгруппами.

Эти группы локально изоморфны прямым произведениям некоммутативных простых групп Ли.

Картан установил, что условием полупростоты группы Ли является невырожденность квадратичной формы

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = (\psi_1)^2 - 2\psi_2 = \sum_u \sum_v \sum_w \sum_x c_{uwx} c_{vxw} h_u h_v, \tag{2.22}$$

а условием разрешимости группы Ли является тождественное обращение формы (2.22) в нуль. Выполнение последнего условия для коммутативных групп очевидно, так как в этом случае все структурные константы c_{uvw} равны нулю.

Форма (2.22) называется *формой Киллинга—Картана*. В случае, когда $\psi_1 = 0$, эта форма имеет вид $-2\psi_2$.

В случае полупростой группы Ли форма (2.22) определяет в ее алгебре Ли метрику комплексного квадратичного евклидова пространства $\mathbb{C}R^r$, если считать значение формы (2.22) для вектора $\boldsymbol{h}$ квадратом длины этого вектора. Картан дал строгое доказательство того, что подгруппа нулевого ранга полупростой группы Ли, которую рассматривал Киллинг, коммутативна и что эту подгруппу можно определить как множество всех элементов группы, перестановочных с элементом общего вида («регулярным элементом») группы. Поэтому в настоящее время эту подгруппу называют *подгруппой Картана* полупростой группы Ли, а соответствующую этой подгруппе подалгебру алгебры Ли называют *подалгеброй Картана* алгебры Ли.

Картан несколько видоизменил киллинговские обозначения простых групп Ли: группы классов A, B, C, D ранга n он обозначал A_n, B_n, C_n, D_n и применял эти обозначения для всех четырех серий, начиная с $n = 1$.

Группы VIE, VIIE и VIIIE он обозначал E_6, E_7 и E_8. Картан доказал, что группы IVE и IVF изоморфны, и обозначил эту группу F_4, а группу IIC размерности 14 Картан обозначил G_2. Картан рассматривал изоморфизмы между группами A_1, B_1 и C_1, между группами B_2 и C_2 и между группами A_3 и D_3, а также между группой D_2 и прямым произведением двух групп B_1. Группа D_1 проста, но не полупроста.

Тщательное сравнение диссертации Картана и работы Киллинга [Kil2] произвел Томас Хокинс [Haw3], который отметил все случаи, когда Картан исправил ошибки или упущения Киллинга. В частности, Хокинс указал, что при рассмотрении группы E_8 Картан, который «был искусным и не боящимся трудностей вычислителем», проверил выполнение тождества Якоби для всех 2 511 496 сочетаний из 248 базисных элемен-

тов алгебры Ли этой группы по 3. Киллинг этих вычислений не проводил.

Корни комплексных простых групп Ли

Корни характеристического уравнения (2.19) комплексной полупростой группы Ли, кратко называемые «корнями группы Ли», представляют собой собственные числа матрицы линейного преобразования

$$Ah = [ah] \tag{2.23}$$

в алгебре Ли этой группы, где h — произвольный элемент алгебры Ли, a — элемент подалгебры Картана этой алгебры.

Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой элемент a_{ij} равен 1, а все остальные элементы равны 0. Произведение матриц E_{ij} и E_{kh} является матрицей E_{ih}, если $j = k$, и является нулевой матрицей, если j не равно k.

В случае группы матриц подгруппа Картана этой группы состоит из диагональных матриц, т. е. матриц вида $\sum\limits_i u_i E_{ii}$, а матрицы подалгебры Картана алгебры Ли этой группы также являются диагональными матрицами $\sum\limits_i a_i E_{ii}$.

В случае группы $\mathbb{C}SL_{n+1}$, т. е. группы A_n, подгруппа Картана может быть приведена к совокупности матриц вида $\sum\limits_i u_i E_{ii}$, удовлетворяющих условию $\prod\limits_i u_i = 1$. Алгебра Ли этой группы состоит из матриц A $(n+1)$-го порядка, у которых след $\mathrm{Tr}\,A$, т. е. сумма элементов главной диагонали, равен 0. Подалгебра Картана этой алгебры состоит из матриц $A = \sum\limits_i a_i E_{ii}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_i a_i = 0$.

Коммутатор $[AE_{jk}]$ имеет вид

$$\left[\sum_i a_i E_{ii} E_{jk}\right] = \sum_i a_i E_{ii} E_{jk} - E_{jk} \sum_i a_i E_{ii} = (a_j - a_k) E_{jk}.$$

Это соотношение показывает, что матрицы E_{jk} играют роль собственных векторов для всех матриц линейных преобразований (2.23), а соответствующий корень группы Ли A_n имеет вид $a_j - a_k$. Поэтому Киллинг и Картан записывали корни группы A_n, соответствующие собственным векторам E_{jk} матриц линейных преобразований (2.23), в виде

$$\omega_j - \omega_k, \quad \text{где} \quad \sum_i \omega_i = 0. \tag{2.24}$$

В случае группы $\mathbb{C}SO_{2n+1}$, т. е. группы B_n матриц линейных преобразований, переводящих в себя квадратичную форму

$$\sum_i x_i x_{2n-i+2} + (x_{n+1})^2,$$

подгруппа Картана может быть приведена к совокупности матриц вида $\sum_i u_i E_{ii}$, для которых $u_{2n-i+2} = \dfrac{1}{u_i}$, $u_{n+1} = 1$. Подалгебра Картана алгебры Ли этой группы состоит из матриц $A = \sum_i a_i E_{ii}$, для которых $a_{2n-i+2} = -a_i$, $a_{n+1} = 0$. Составляя коммутатор $[AE_{jk}]$, мы найдем, что матрицы E_{jk} играют роль собственных векторов для всех матриц линейных преобразований (2.23), а корни группы B_n можно записать в виде

$$\pm\omega_i \pm \omega_j, \quad \pm\omega_i. \tag{2.25}$$

В случае группы $\mathbb{C}Sp_{2n}$, т. е. группы C_n матриц линейных преобразований, переводящих в себя билинейную форму

$$\sum_i (x_i y_{2n-i+1} - y_i x_{2n-i+1}),$$

подгруппа Картана может быть приведена к совокупности матриц вида $\sum_i u_i E_{ii}$, где $u_{2n-i+1} = \dfrac{1}{u_i}$, а подалгебра Картана алгебры Ли этой группы состоит из матриц $A = \sum_i a_i E_{ii}$, где $a_{2n-i+1} = -a_i$. Составляя коммутатор $[AE_{jk}]$, мы найдем, что матрицы E_{jk} играют роль собственных векторов для всех матриц линейных преобразований (2.23), а корни группы C_n можно записать в виде

$$\pm\omega_i \pm \omega_j, \quad \pm 2\omega_i. \tag{2.26}$$

В случае группы $\mathbb{C}SO_{2n}$, т. е. группы D_n матриц линейных преобразований, переводящих в себя квадратичную форму

$$\sum_i x_i x_{2n-i+1},$$

подгруппа Картана может быть приведена к совокупности матриц вида $\sum_i u_i E_{ii}$, для которых $u_{2n-i+1} = \dfrac{1}{u_i}$, а подалгебра Картана алгебры Ли этой группы состоит из матриц $A = \sum a_i E_{ii}$, где $a_{2n-i+1} = -a_i$. Составляя коммутатор $[AE_{jk}]$, мы найдем, что матрицы E_{jk} играют роль собственных векторов для всех матриц линейных преобразований (2.23), а корни

группы D_n можно записать в виде

$$\pm\omega_i \pm \omega_j. \tag{2.27}$$

Выражения (2.24)—(2.27) являются линейными формами, называемыми *корневыми формами* комплексных простых групп Ли.

Киллинг заметил, что корневые формы являются линейными комбинациями некоторого числа из них, которые образуют базис, причем коэффициенты этих линейных комбинаций являются целыми числами 1, 2, 3, −1, −2 и −3, а число базисных форм равно рангу группы. Картан назвал эти базисные формы *фундаментальными* и показал, что для случаев (2.24)—(2.27) фундаментальные формы таковы:

для форм (2.24) группы A_n

$$\alpha_1 = \omega_0 - \omega_1,\ \alpha_2 = \omega_1 - \omega_2,\ \ldots,\ \alpha_n = \omega_{n-1} - \omega_n; \tag{2.28}$$

для форм (2.25) группы B_n

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2,\ \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} = \omega_{n-2} - \omega_n,\ \alpha_n = \omega_n; \tag{2.29}$$

для форм (2.26) группы C_n

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2,\ \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} = \omega_{n-2} - \omega_n,\ \alpha_n = 2\omega_n; \tag{2.30}$$

для форм (2.27) группы D_n

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2,\ \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} = \omega_{n-1} - \omega_n,\ \alpha_n = \omega_{n-1} + \omega_n. \tag{2.31}$$

Г. Вейль [Вей1] заметил, что, так как корни простых групп Ли являются линейными функциями $\omega = \sum_i a_i\omega_i$ элементов подалгебр Картана алгебр Ли этих групп, они могут быть записаны в виде скалярных произведений $\omega = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ «корневых векторов» $\boldsymbol{a}$ и элементов $\boldsymbol{h}$ подалгебры Картана. Корневые векторы $\boldsymbol{a}$ являются линейными комбинациями

$$\boldsymbol{a} = \sum_i a_i \boldsymbol{E}_i \tag{2.32}$$

векторов $\boldsymbol{E}_i$ базиса в подалгебре Картана или в $(n+1)$-мерной плоскости, содержащей эту подалгебру. Базис $\boldsymbol{E}_i$ — ортонормированный в метрике, индуцированной метрикой Картана в алгебре Ли. Во всех случаях сами корневые векторы расположены в подалгебре Картана комплексной простой алгебры Ли.

Число корневых векторов комплексной простой группы Ли равно разности размерности и ранга группы $r - n$. Для группы A_n это число равно $n(n+1)$, для групп B_n и C_n это число равно $2n^2$, для группы D_n

это число равно $2n(n-1)$, для групп G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8 эти числа равны, соответственно, 12, 48, 72, 126 и 240.

Подалгебры Картана в метрике Картана являются комплексными евклидовыми пространствами $\mathbb{C}R^n$. Б. Л. Ван дер Варден [ВдВ] заметил, что так как коэффициенты a_i линейных комбинаций (2.32) — вещественные числа, корневые векторы можно рассматривать также как векторы вещественного евклидова пространства R^n.

На рис. 2.1 a—d изображены корневые векторы групп A_2, B_2, C_2 и D_2.

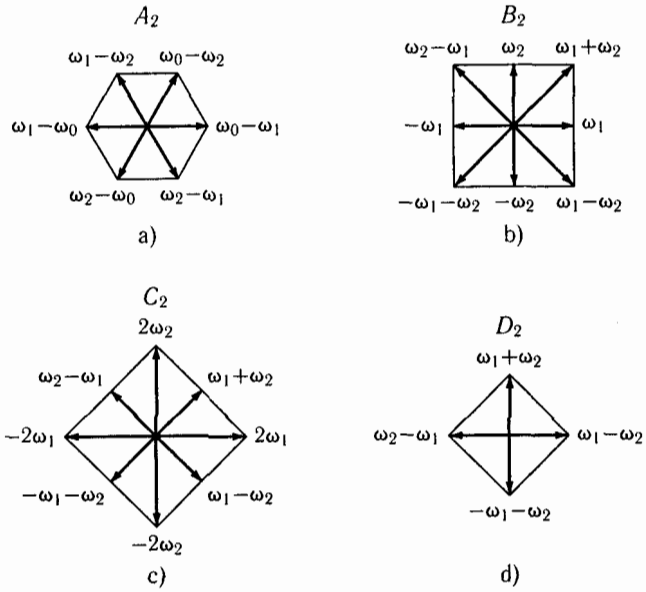


Рис. 2.1

Евгений Борисович Дынкин (р. 1924) в работе 1946 г. «Классификация простых групп Ли» [Дын1] предложил наглядное изображение фундаментальных систем корневых векторов комплексных простых групп Ли в виде диаграмм, на которых эти корневые векторы изображаются точками, соединенными одной линией в случае, когда угол между векторами равен $2\pi/3$, двумя линиями, когда угол между векторами равен $3\pi/4$, тремя линиями, когда этот угол равен $5\pi/6$, и не соединяемыми линиями в случае, когда угол равен $\pi/2$.

В работе [Дын1] длины корневых векторов обозначались специальными пометками около соответственных точек диаграмм, позже в 1950-е

годы Дынкин изображал более длинные корневые векторы черными точками, а более короткие — белыми точками.

Жак Титс (р. 1930) в работе 1955 г. «О некоторых классах однородных пространств групп Ли» [Ti1] предложил в случае, когда две точки диаграммы Дынкина, соединенные несколькими линиями, изображают два корневых вектора различной длины, ставить на этих линиях знак >, обращенный острием к изображению вектора меньшей длины. В настоящее время этот способ указания длин корневых векторов является общепринятым.

Диаграммы Дынкина можно рассматривать и для комплексных полупростых групп Ли: эти диаграммы состоят из не связанных между собой диаграмм Дынкина простых групп Ли, прямое произведение которых локально изоморфно полупростой группе.

В качестве фундаментальной системы корневых векторов Дынкин пользовался определенными им «простыми корневыми векторами»: Дынкин считал, что корневой вектор $\boldsymbol{a} = \sum_i a_i \boldsymbol{E}_i$ больше корневого вектора $\boldsymbol{b} = \sum_i b_i \boldsymbol{E}_i$, если для первой пары неравных коэффициентов $a_i > b_i$. Дынкин называл корневой вектор положительным, если он больше нулевого вектора, он называл корневой вектор простым, если этот вектор положителен и не может быть представлен в виде суммы двух положительных корневых векторов. Число простых векторов равно рангу группы.

Наглядное изображение корневых векторов в работах [ВдВ] и [Дын1] позволило их авторам значительно упростить классификацию комплексных простых групп Ли.

На рис. 2.2 a—d изображены диаграммы Дынкина комплексных простых групп Ли классов A_n, B_n, C_n и D_n.

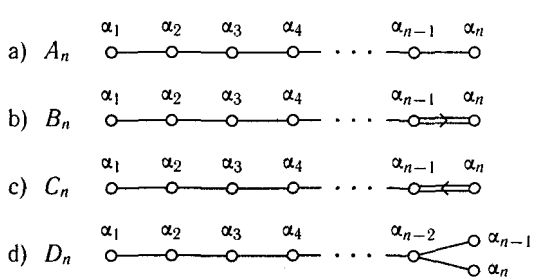


Рис. 2.2

На рис. 2.3 a—d изображены диаграммы Дынкина изоморфных комплексных простых групп Ли A_1, B_1 и C_1, B_2 и C_2, A_3 и D_3, а также полупростой группы D_2 и двух простых групп B_1, прямое произведение которых локально изоморфно этой группе.

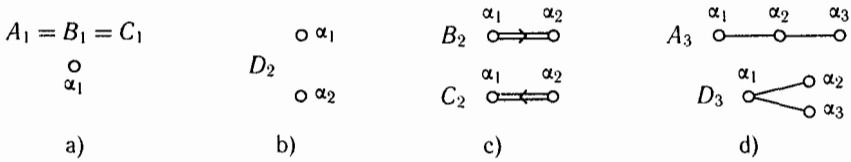


Рис. 2.3

Задание диаграмм Дынкина равносильно заданию «матриц Картана» — квадратных матриц порядка, равного рангу группы, с элементами

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \tag{2.33}$$

где α_i — корневые векторы фундаментальной системы, (α_i, α_j) — скалярное произведение векторов α_i и α_j в метрике, определяемой квадратичной формой (2.22). Название «матрицы Картана» объясняется тем, что числа (2.33) встречаются в работе Картана [5].

Диаграмма Дынкина комплексной простой группы Ли, как и матрица Картана этой группы, позволяет восстановить всю систему корневых векторов этой группы, а знание этой системы дает возможность построить всю алгебру Ли этой группы. В силу теорем С. Ли алгебра Ли комплексной простой группы Ли определяет эту группу с точностью до локального изоморфизма.

В диссертации [5] Картан показал, что корни комплексных простых групп Ли особых классов можно записать в виде:

для группы G_2

$$\omega_i - \omega_j, \quad \pm\Big(\sum_i \omega_i - 3\omega_j\Big), \quad i, j = 0, 1, 2; \tag{2.34}$$

для группы F_4

$$\pm\omega_i, \quad \pm\omega_i \pm \omega_j, \quad \frac{1}{2}(\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4), \quad i, j = 1, 2, 3, 4; \tag{2.35}$$

для группы E_6

$$\omega_i - \omega_j, \quad \pm\sqrt{2}\omega_0, \quad \pm\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 + \frac{1}{2}\sum_i \omega_i - \omega_j - \omega_k - \omega_h\Big),$$
$$h, i, j, k = 1, 2, \ldots, 6; \tag{2.36}$$

для группы E_7

$$\omega_i - \omega_j, \quad \pm\Big(\frac{1}{2}\sum_i \omega_i - \omega_g - \omega_h - \omega_j - \omega_k\Big),$$
$$g, h, i, j, k = 1, 2, \ldots, 7; \tag{2.37}$$

для группы E_8

$$\pm\omega_i \pm \omega_j, \quad \pm\Big(\frac{1}{2}\sum_i \omega_i - \omega_j\Big), \quad \pm\Big(\frac{1}{2}\sum_i \omega_i - \omega_j - \omega_k - \omega_h\Big),$$
$$h, i, j, k = 1, 2, \ldots, 8. \tag{2.38}$$

Простые корни комплексных простых групп Ли особых классов, образующие фундаментальные системы, имеют вид:

для группы G_2

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2, \quad \alpha_2 = \omega_0 + \omega_1 - 2\omega_2; \tag{2.39}$$

для группы F_4

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \omega_2 - \omega_3, \quad \alpha_2 = \omega_3 - \omega_4, \quad \alpha_3 = \omega_4,\\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_3 - \omega_3 - \omega_4);\end{gathered} \tag{2.40}$$

для группы E_6

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2, \quad \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3, \quad \alpha_3 = \omega_3 - \omega_4,\\ \alpha_4 = \omega_4 - \omega_5, \quad \alpha_5 = \omega_5 - \omega_6,\\ \alpha_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6);\end{gathered} \tag{2.41}$$

для группы E_7

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2, \quad \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3, \quad \alpha_3 = \omega_3 - \omega_4,\\ \alpha_4 = \omega_4 - \omega_5, \quad \alpha_5 = \omega_5 - \omega_6,\\ \alpha_6 = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7),\\ \alpha_7 = \omega_6 - \omega_7;\end{gathered} \tag{2.42}$$

для группы E_8

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \omega_2 - \omega_3, \quad \alpha_2 = \omega_3 - \omega_4, \quad \alpha_3 = \omega_4 - \omega_5,\\ \alpha_4 = \omega_5 - \omega_6, \quad \alpha_5 = \omega_6 - \omega_7, \quad \alpha_6 = \omega_7 - \omega_8,\\ \alpha_7 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 - \omega_7 + \omega_8),\\ \alpha_8 = \omega_7 + \omega_8.\end{gathered} \tag{2.43}$$

На рис. 2.4 изображены корневые векторы комплексной простой группы Ли G_2.

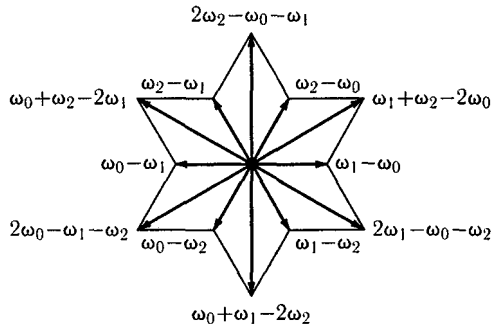


Рис. 2.4

На рис. 2.5 а—е изображены диаграммы Дынкина комплексных простых групп Ли G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8.

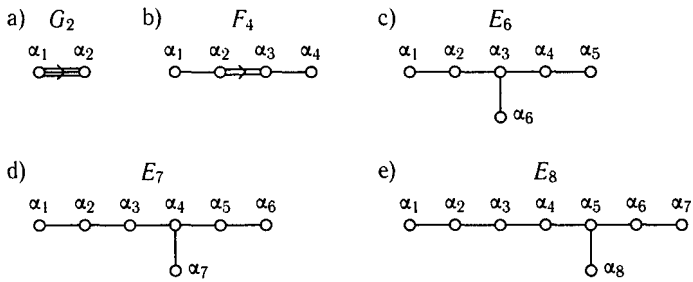


Рис. 2.5

Группы Вейля комплексных простых групп Ли

Киллинг в работе [Kil2] и Картан в своей диссертации рассматривали преобразования корневых систем комплексных простых групп Ли. Так как эти корни являются корнями характеристического уравнения группы Ли (2.19), то эти преобразования можно рассматривать как элементы группы Галуа этого уравнения. Поэтому Картан называл группу этих преобразований «группой Галуа группы Ли».

Киллинг и Картан связывали с каждым корнем α инволютивную подстановку $S(\alpha)$ системы корней. Они рассматривали эти подстановки как

отражения, которые Вейль в работе [Wey3] записывал в виде

$$x' = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \tag{2.44}$$

т. е. в виде отражений от гиперплоскостей, проходящих через общее начало корневых векторов и перпендикулярных корневым векторам α. Линейные преобразования, порождаемые этими отражениями, являются вращениями пространства R^n вокруг общего начала корневых векторов. Эти вращения образуют группу, которую Вейль называл «группой (S)». В настоящее время эта группа называется «сферической группой Вейля комплексной простой группы Ли».

Под влиянием работы [Wey3] Картан вернулся в 1925 г. к теории корней простых групп Ли и в работе «Принцип двойственности и теория простых и полупростых групп» [82] доказал, что группа Вейля W простой группы Ли совпадает с группой Галуа Γ этой группы для всех простых групп, кроме групп A_n, D_n и E_6, а для этих групп группа W является инвариантной подгруппой группы Γ. При этом факторгруппа Γ/W в случае группы A_n, группы D_n при всех n, кроме 4, и группы E_6 изоморфна группе перестановок 2 элементов, а в случае группы D_4 изоморфна группе перестановок 3 элементов. Этот факт связан с тем, что диаграммы Дынкина групп A_n, D_n $(n \neq 4)$ и E_6 обладают двусторонней симметрией, а диаграмма Дынкина группы D_4 (рис. 2.6) обладает трехсторонней симметрией.

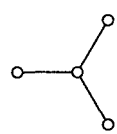


Рис. 2.6

Картан отметил, что двусторонняя симметрия корней группы A_n связана с принципом двойственности проективной геометрии, и установил аналогичные принципы двойственности в пространствах, группами преобразований которых являются группы D_n и E_6. Картан установил также «принцип тройственности» в пространстве, группа преобразований которого есть D_4.

Движения пространства R^n, порождаемые отражениями от гиперплоскостей, изучались Гарольдом Скоттом Макдональдом Коксетером (1907—2003) в работе 1934 г. [Cox1]. В этой работе было доказано, что в случае, когда гиперплоскости, определяющие отражения, проходят через одну точку и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, порождаемые ими движения образуют конечные группы, а в общем случае эти движения образуют бесконечные дискретные группы. Коксетер провел полную классификацию этих групп и предложил изображать их диаграммами, близкими по строению к появившимся через 12 лет диаграммам Дынкина. Точки диаграмм Коксетера изображают гиперплоскости, определяющие отражения. Эти точки не соединяются линиями

в случае, когда гиперплоскости перпендикулярны, соединяются линиями без числовой отметки в случае, когда угол между гиперплоскостями равен $\pi/3$, и соединяются линиями с числовой отметкой n в случае, когда угол между гиперплоскостями ранен π/n при $n > 3$.

На рис. 2.7 изображены диаграммы Коксетера конечных групп движений, порождаемых отражениями от гиперплоскостей. В том случае, когда эти диаграммы состоят из k линий без отметок и не имеют разветвлений, эти группы обозначаются $[3^k]$. В том случае, когда диаграммы имеют три ветви, содержащие k, l и m линий без отметок, группы обозначаются $[3^{k,l,m}]$. В том случае, когда диаграмма не имеет разветвлений и состоит из k линий с отметками n_i, группа обозначается $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ (отметки 3 на диаграмме не обозначаются); если на диаграмме имеется m линий без отметок, расположенных по одной прямой одна за другой, то в обозначении группы пишется 3^m.

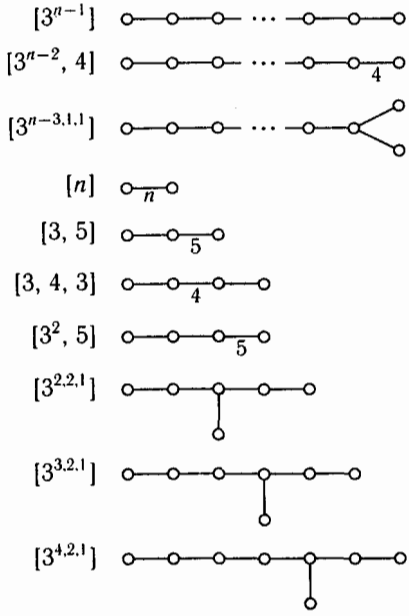


Рис. 2.7

Многие из этих групп являются группами симметрии правильных многоугольников или многогранников. Группа $[3^{n-1}]$ — группа симметрии правильного симплекса ($(n+1)$-гранника) в пространстве R^n. Группа

$[3^{n-2}, 4]$ — группа симметрии куба в пространстве R^n. Группа $[3^{n-3,1,1}]$ — группа симметрии «полукуба» в пространстве R^n, получаемого из куба удалением одной вершины на каждом его ребре. Группа $[n]$ — группа симметрии правильного n-угольника на плоскости R^2. Группа $[3, 5]$ — группа симметрии додекаэдра и икосаэдра в пространстве R^3. Группа $[3, 4, 3]$ — группа симметрии правильного 24-гранника в пространстве R^4. Группа $[3^2, 5]$ — группа симметрии правильных 120-гранника и 600-гранника в пространстве R^4.

Группы $[3^{2,2,1}]$ и $[3^{3,2,1}]$ являются группами симметрии соответственно кубической поверхности с 27 прямолинейными образующими в проективном пространстве P^3 и кривой четвертого порядка с 28 двойными касательными на проективной плоскости P^2.

Группа $[3^{4,2,1}]$ — подгруппа группы перестановок 120 элементов, которую Жордан называл «первой гипоабелевой группой».

Все эти группы, за исключением групп $[3, 5]$ и $[3^2, 5]$, являются сферическими группами Вейля комплексных простых групп Ли. Группа $[3^{n-1}]$ — сферическая группа Вейля группы A_n, группа $[3^{n-2}, 4]$ — групп B_n и C_n, группа $[3^{n-3,1,1}]$ — группы D_n. Группы $[6]$, $[3, 4, 3]$, $[3^{2,2,1}]$, $[3^{3,2,1}]$ и $[3^{4,2,1}]$ — сферические группы Вейля, соответственно, групп G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8.

Изоморфизм групп Галуа характеристических уравнений трех последних групп Ли и трех последних конечных групп, порождаемых отражениями, был указан Картаном еще в 1894 г. в заметке «О приведении структуры группы к ее каноническому виду» [4] и был доказан им в 1896 г. в статье [9]. Для группы E_6 Картан привел более строгое доказательство этого результата в статье [82] и снова вернулся к геометрической интерпретации групп E_6 и E_7 в 1946 г. в статье [184].

Особенно важны произведения n отражений $S(\alpha_i)$, соответствующих простым корням комплексных простых групп Ли. В настоящее время эти произведения называются *преобразованиями Коксетера*. При любом порядке множителей $S(\alpha_i)$ собственные значения матриц произведения этих преобразований имеют вид e^{M_i}, где числа M_i равны $2\pi a_i/h$, причем числа a_i — целые числа, называемые *показателями* комплексной простой группы Ли, а число h — *число Коксетера* этой группы, выражаемое через ранг n и размерность r этой группы по формуле

$$h = \frac{r-n}{n}. \tag{2.45}$$

Показатели a_i, число которых для каждой группы равно рангу n этой группы, удовлетворяют неравенствам $0 < a_i < h$ и равенствам $a_i + a_{n-i+1} = h$. Эти показатели играют важную роль во многих вопросах теории

простых групп Ли. Впервые они были определены Коксетером в 1935 г. в работе [Cox2] с тем же названием, что и [Cox1], опубликованной в виде приложения к работе Вейля [Wey3].

Независимо от Коксетера из других соображений к этим показателям пришел Дынкин в работе [Дын2].

Показатели a_i для комплексных простых групп Ли равны:

для групп A_n	$1, 2, 3, \ldots, n$ $(h = n + 1)$,	
для групп B_n и C_n	$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$ $(h = 2n)$,	
для групп D_n при четном n	$1, 3, 5, \ldots, n - 3, n - 1, n - 1, n + 1, \ldots, 2n - 3$ $(h = 2n - 2)$,	
для групп D_n при нечетном n	$1, 3, 5, \ldots n - 2, n - 1, n, \ldots, 2n - 3$ $(h = 2n - 2)$,	(2.46)
для группы G_2	$1, 5$ $(h = 6)$,	
для группы F_4	$1, 5, 7, 11$ $(h = 12)$,	
для группы E_6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$ $(h = 12)$,	
для группы E_7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ $(h = 18)$,	
для группы E_8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ $(h = 30)$.	

Сравнение рис. 2.3 и рис. 2.5 с рис. 2.7 показывает, что диаграммы Дынкина для групп A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 имеют тот же вид, что и диаграммы Коксетера сферических групп Вейля этих групп, а конфигурации остальных диаграмм Дынкина близки к виду соответствующих диаграмм Коксетера. Конечные группы движений, порожденные отражениями от гиперплоскостей, были применены к теории простых групп Ли в работе [Cox2].

Эрнст Витт (1914—1997) в 1941 г. в работе «Группы отражений и перечисление полупростых колец Ли» [Wit] провел классификацию алгебр Ли комплексных простых групп Ли с помощью диаграмм Коксетера, в которых заменил линии с пометкой 4 двойными линиями, а линию с пометкой 6 — тройной линией. Диаграммы Коксетера в этой форме отличаются от диаграмм Дынкина только отсутствием знаков $>$, однако геометрический смысл точек и линий в диаграммах Коксетера и Дынкина совершенно различен.

В работе [Cox1] были найдены все бесконечные дискретные группы движений пространства R^n, порожденные отражениями от гиперплоскостей. Обозначения этих групп и изображающие их диаграммы Коксетера подобны тем, которые применяются для конечных групп, порожденных отражениями.

На рис. 2.8 изображены диаграммы Коксетера бесконечных дискретных групп, порожденных отражениями.

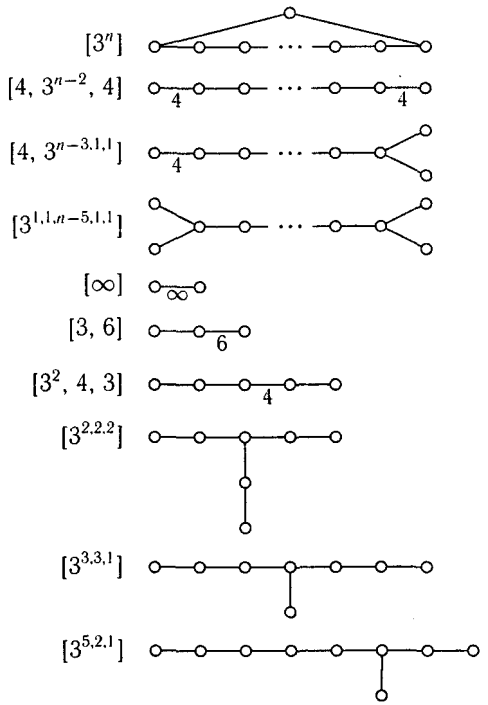


Рис. 2.8

Группа $[\infty]$ — группа движений прямой R^1, порожденная отражениями прямой от двух ее точек, изоморфная группе движений пространства R^n, порожденных отражениями этого пространства от двух параллельных гиперплоскостей.

Группы $[3^n]$ — группы симметрии многогранных углов. Группа $[4, 3^{n-2}, 4]$ — группа симметрии «сот» пространства R^n, образованных разбиением этого пространства на кубы.

Группа $[3, 6]$ — группа симметрии «сот» плоскости R^2, образованных разбиением этой плоскости на равносторонние треугольники или на правильные шестиугольники. Группа $[3^2, 4, 3]$ — группа симметрии «сот» пространства R^4, образованных разбиением этого пространства на правильные 24-гранники.

Бесконечные дискретные группы движений пространства R^n, определяемые корневыми векторами комплексных простых групп Ли ранга n, называются *аффинными группами Вейля* этих групп Ли. Эти группы

были определены Коксетером в работе [Cox2]. Коксетер дополнил отражения от гиперплоскостей, порождающие сферическую группу Вейля, отражением от гиперплоскости, проведенной через конец одного из корневых векторов перпендикулярно этому вектору. В качестве этого вектора в настоящее время берут минимальный корневой вектор в смысле Дынкина.

Диаграммы Дынкина, дополненные точкой, изображающей минимальный корневой вектор, называются *расширенными диаграммами Дынкина*.

В случае группы A_n корневая форма, соответствующая минимальному корневому вектору, имеет вид $\omega_n - \omega_0$, а в случае группы C_n — вид $-2\omega_1$. В случае групп B_n, D_n, F_4 и E_8 корневые формы, соответствующие минимальным корневым векторам, имеют вид $-\omega_1 - \omega_2$.

В случае групп G_2, E_6 и E_7 корневые формы, соответствующие минимальным корневым векторам, имеют, соответственно, вид $\omega_0 + \omega_1 - 2\omega_2$, $-(\sqrt{2}/2)\omega_0$, $\omega_7 - \omega_0$. Поэтому расширенные диаграммы Дынкина комплексных простых групп Ли имеют вид, указанный на рис. 2.9.

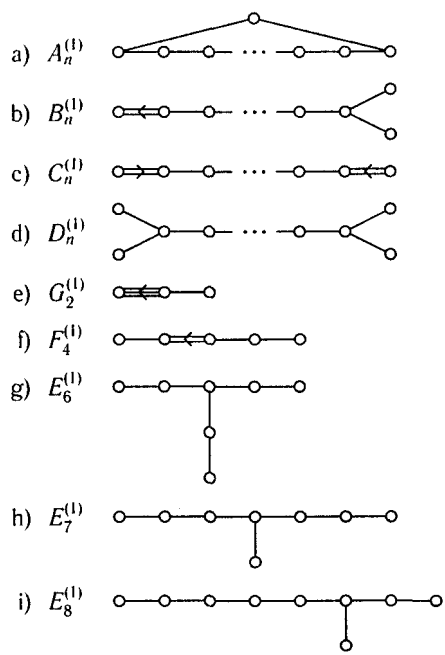


Рис. 2.9

В случае, когда расширенная диаграмма Дынкина комплексной простой группы Ли обладает k-сторонней симметрией, будем называть число k *индексом симметрии* этой диаграммы. В случае, когда расширенная диаграмма Дынкина не обладает симметрией, будем считать ее индекс симметрии равным 1.

Индекс симметрии расширенной диаграммы Дынкина
для группы A_n равен $n+1$,
для групп B_n, C_n, E_7 равен 2,
для группы D_n равен 4,
для групп G_2, F_4 и E_8 равен 1,
для группы E_6 равен 3.

Вычисляя определители матриц Картана (2.33) комплексных простых групп Ли, мы найдем, что эти определители равны индексам симметрии расширенных диаграмм Дынкина этих групп.

Сравнение рис. 2.8 и 2.9 показывает, что расширенные диаграммы Дынкина групп A_n, D_n, E_6, E_7 и E_8 совпадают с диаграммами Коксетера аффинных групп Вейля этих групп, а расширенные диаграммы Дынкина остальных комплексных простых групп Ли отличаются от диаграмм Коксетера аффинных групп Вейля этих групп, если заменить в них числовые пометки двойными или тройными линиями, как это делал Витт, только наличием знака $>$, т. е. так же, как обычная диаграмма Дынкина отличается от диаграмм Коксетера соответствующих сферических групп Вейля в форме Витта.

Как для сферических, так и для аффинных групп Вейля комплексных простых групп Ли можно определить фундаментальные области. Для сферических групп Вейля это *камеры Вейля*, т. е. многогранные углы, ограниченные гиперплоскостями, проходящими через общее начало корневых векторов перпендикулярно простым корневым векторам. Для аффинных групп Вейля это *альковы Вейля*, т. е. симплексы, ограниченные теми же гиперплоскостями, что и камеры Вейля, и гиперплоскостью, проходящей через конец минимального корневого вектора перпендикулярно этому вектору. Эти фундаментальные области были определены Вейлем в работе [Wey3].

Ассоциативные и альтернативные алгебры

В XIX веке наряду с определенными Галуа группами и полями появился целый ряд новых числовых систем. Эти числовые системы, являющиеся обобщениями поля комплексных чисел, первоначально также назывались системами комплексных чисел, а позже, для того, чтобы отличить их от обычных комплексных чисел, их стали назы-

вать системами гиперкомплексных чисел или ассоциативными алгебрами.

Помимо ассоциативных алгебр, т. е. векторных пространств, в которых определено ассоциативное умножение векторов, дистрибутивное относительно их сложения и перестановочное с умножением векторов на числа, стали рассматривать также более общие алгебры, отличающиеся от ассоциативных тем, что умножение их элементов неассоциативно. К неассоциативным алгебрам относятся алгебры Ли, в которых ассоциативность умножения элементов заменена тождеством Якоби (2.14).

Базисные элементы $\{e_i\}$ линейного пространства алгебры называются *единицами алгебры*. Умножение единиц алгебры определяется формулами

$$e_i e_j = \sum_k c_{ijk} e_k. \tag{2.47}$$

Частным случаем формул (2.47) являются формулы (2.10), в которых роль векторов e_i играют операторы D_u, а роль произведений векторов $e_i e_j$ играют коммутаторы $[D_u D_v]$.

Числа c_{ijk} в случае любой алгебры также называются ее *структурными константами*.

Простейшей алгеброй является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел с единицами 1 и i, $i^2 = -1$. В работах Леонарда Эйлера (1707—1783), Жана Лерона Даламбера (1717—1783), Гаусса и Огюстена Луи Коши (1789—1857) была установлена геометрическая интерпретация комплексных чисел на плоскости комплексного переменного со сложением по правилу параллелограмма и умножением, при котором модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются.

В первой половине XIX в. некоторые математики пытались «обобщить комплексные числа на пространство», т. е. построить числовую систему с тремя единицами. Такие алгебры определили Огастас де Морган (1806—1871) и Чарльз Гревс (1810—1860), однако в этих алгебрах имелись *делители нуля*, т. е. такие ненулевые элементы, произведение которых равно нулю. Наиболее известная из этих алгебр — алгебра *триплетов*, изоморфная прямой сумме полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ вещественных и комплексных чисел. Элементы этой алгебры можно представить парами (x, z) чисел этих полей, причем сложение и умножение этих пар чисел определяется формулами

$$(x, z) + (y, w) = (x + y, z + w), \qquad (x, z)(y, w) = (xy, zw). \tag{2.48}$$

В 1844 г. Вильям Роуан Гамильтон (1805—1865) определил алгебру $\mathbb{H}$ *кватернионов* с 4 единицами $1, i, j, k$, $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji = k$.

Кватернионы вида $xi + yj + zk$ Гамильтон называл *векторами* и считал кватернионы общего вида суммами вещественных чисел («скаляров») и векторов. Алгебра $\mathbb{H}$ является телом, т. е. обладает всеми свойствами поля, за исключением коммутативности умножения элементов.

В теле $\mathbb{H}$, как и в поле $\mathbb{C}$, для каждого элемента α определен переход к сопряженному элементу $\bar{\alpha}$, состоящий в умножении кватернионных единиц i, j, k на -1. Сопряженные кватернионы обладают свойством

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}. \tag{2.49}$$

Произведение $\alpha\bar{\alpha}$, равное сумме квадратов координат кватерниона α, называется квадратом *модуля* $|\alpha|$ этого кватерниона. В теле $\mathbb{H}$, как и в поле $\mathbb{C}$, имеет место соотношение

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|. \tag{2.50}$$

Артур Кэли (1821—1895) и Джон Томас Гревс, брат Ч. Гревса, обобщая алгебру $\mathbb{H}$, пришли к алгебре $\mathbb{O}$ *октонионов*, называемых также *октавами*, *числами Кэли* и *числами Кэли—Гревса*. Алгебра $\mathbb{O}$ имеет 8 единиц $1, i, j, k, l, p, q, r$, $i^2 = j^2 = l^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $il = -li = p$, $kp = -pk = q$, $jp = -pj = r$.

Алгебра $\mathbb{O}$, как и алгебра $\mathbb{H}$, является телом, однако она не ассоциативна, но *альтернативна*, т. е. всякие два ее элемента порождают ассоциативную подалгебру. В алгебре $\mathbb{O}$, как и в поле $\mathbb{C}$ и в теле $\mathbb{H}$, для каждого элемента α определен сопряженный элемент $\bar{\alpha}$. Переход к сопряженному октониону состоит в умножении единиц $i, j, \ldots, r$ на -1. Сопряженные октионионы обладают свойством (2.49). *Модуль* октониона $|\alpha|$, квадрат которого $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$ равен сумме квадратов координат октониона, обладает свойством (2.50).

Кэли определил также алгебры $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{C}_n$ вещественных и комплексных матриц n-го порядка. Сложение и умножение матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ определяется по формулам

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad AB = \Big(\sum_j a_{ij}b_{jk}\Big). \tag{2.51}$$

Алгебры $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{C}_n$ обладают n^2 единицами E_{ij}, т. е. матрицами, у которых элемент a_{ij} равен 1, а все остальные элементы равны 0. В этих алгебрах имеются делители нуля — матрицы с нулевыми определителями. Аналогично определяется алгебра $\mathbb{H}_n$ кватернионных матриц n-го порядка. Матрицы этой алгебры не имеют определителей, их роль играют «полуопределители» — вещественные числа, равные определителям

матриц алгебр $\mathbb{C}_{2n}$ и $\mathbb{R}_{4n}$, обладающих подалгебрами, изоморфными алгебре $\mathbb{H}_n$.

Для алгебр $\mathbf{A}$ с единицами $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $\mathbf{B}$ с единицами $f_1, f_2, \ldots, f_m$ можно определить *прямую сумму* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ и *тензорное произведение* $\mathbf{AB}$. Алгебра $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ — алгебра с $m+n$ единицами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $f_1, f_2, \ldots, f_m$, причем все произведения $e_i f_j = f_j e_i = 0$. Тензорное произведение $\mathbf{AB}$ — алгебра с mn единицами $e_i f_j = f_j e_i$.

Сложение и умножение элементов любой алгебры $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ можно записать в виде (2.48). Алгебры $\mathbb{C}_n$ и $\mathbb{H}_n$ являются тензорными произведениями $\mathbb{CR}_n$ и $\mathbb{HR}_n$. Нетрудно проверить, что алгебра $\mathbb{C}_2$ изоморфна тензорному произведению $\mathbb{CH}$, алгебра $\mathbb{R}_4$ изоморфна тензорному произведению $\mathbb{H}^2$ двух алгебр $\mathbb{H}$, а тензорное произведение алгебр $\mathbb{R}_m$ и $\mathbb{R}_n$ изоморфно алгебре $\mathbb{R}_{mn}$.

Основатель линейной алгебры и многомерной геометрии Герман Грассман (1809—1877) в книге «Учение о линейном протяжении» [Gra], в которой он ввел n-мерное линейное пространство, определил *внешнее произведение* векторов этого пространства. В настоящее время внешнее произведение векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ записывается в виде $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_k$. Это произведение не изменяется при четной перестановке векторов, умножается на -1 при нечетной перестановке векторов и равно нулю, если векторы линейно зависимы. Все возможные внешние произведения $k \leqslant n$ базисных векторов являются 2^n единицами «алгебры экстенсивов» Грассмана.

Клиффорд в 1878 г. в статье «Применение алгебры экстенсивов Грассмана» [Cli] построил новую алгебру, являющуюся видоизменением алгебры Грассмана, где единицами являются $1, i_1, i_2, \ldots, i_n$ и всевозможные внешние произведения элементов i_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ с неравными значениями k. Последним из этих произведений является $i_1 i_2 \ldots i_n$. При этом по определению $i_k^2 = -1$. В настоящее время элементы этой алгебры называются *альтернионами*, или *числами Клиффорда*, а сама эта алгебра обозначается $\mathbb{A}_{n+1}$.

Алгебра $\mathbb{A}_1$ совпадает с полем $\mathbb{R}$, алгебра $\mathbb{A}_2$ совпадает с полем $\mathbb{C}$, алгебра $\mathbb{A}_3$ совпадает с телом $\mathbb{H}$. Алгебры $\mathbb{A}_{n+1}$ при $n > 2$ являются ассоциативными алгебрами с делителями нуля. Число единиц алгебры $\mathbb{A}_n$ равно 2^{n-1}.

Алгебра $\mathbb{A}_4$ изоморфна прямой сумме $\mathbb{H}+\mathbb{H}$, алгебра $\mathbb{A}_5$ — алгебре $\mathbb{H}_2$, алгебра $\mathbb{A}_6$ — алгебре $\mathbb{C}_4$, алгебра $\mathbb{A}_7$ — алгебре $\mathbb{R}_8$, алгебра $\mathbb{A}_8$ — прямой сумме $\mathbb{R}_8+\mathbb{R}_8$. Алгебра $\mathbb{A}_{8m+k}$ изоморфна тензорному произведению алгебры $\mathbb{A}_k$ на m алгебр $\mathbb{R}_{16}$. Поэтому все алгебры $\mathbb{A}_{n+1}$ при $n \geqslant 8$ изоморфны алгебрам вещественных, комплексных или кватер-

нионных матриц, или прямым суммам пар одинаковых алгебр вещественных или кватернионных матриц.

В 1872 г. в работе [Кли] «Предварительный очерк бикватернионов» Клиффорд определил два аналога комплексных чисел, называемые в настоящее время *двойными* и *дуальными числами*. Алгебра $\mathbb{C}'$ двойных чисел имеет две единицы 1 и e, $e^2 = +1$, эта алгебра изоморфна прямой сумме $\mathbb{R} + \mathbb{R}$.

Алгебра $\mathbb{C}^0$ дуальных чисел имеет единицы 1 и ε, $\varepsilon^2 = 0$. *Бикватернионами* Клиффорд называл элементы тензорных произведений $\mathbb{HC}$, $\mathbb{HC}'$ и $\mathbb{HC}^0$. Алгебры $\mathbb{C}'$ и $\mathbb{C}^0$ обладают делителями нуля. В случае алгебры $\mathbb{C}'$ делителями нуля являются двойные числа $e_+ = (1 + e)/2$ и $e_- = (1 - e)/2$, произведение которых равно нулю. В случае алгебры $\mathbb{C}^0$ делитель нуля — дуальная единица ε.

Общее понятие ассоциативной алгебры было введено Бенджамином Пирсом (1809—1880) в работе «Линейные ассоциативные алгебры» [Pe]. В этой работе Пирс определил *нильпотентные элементы* алгебр — элементы, одна из степеней которых равна 0, и *идемпотентные элементы* алгебр — элементы, все степени которых равны между собой. Пример нильпотентного элемента — дуальная единица ε, примеры идемпотентных элементов — двойные числа $e_+ = (1 + e)/2$ и $e_- = (1 - e)/2$. Пирс провел классификацию алгебр небольшой размерности.

В 80-х гг. XIX в. появилось несколько работ выдающихся математиков по теории алгебр: в 1883 г. статья Вейерштрасса «К теории комплексных величин, образованных n главными единицами» [Wei] и статья Пуанкаре «О комплексных числах» [Poi1], в 1885 г. — статья Рихарда Дедекинда (1831—1916) [Ded] с тем же названием, что и [Wei]. Все эти математики называли алгебры системами комплексных чисел или комплексных величин. Пуанкаре изучал соотношение между алгебрами и билинейными непрерывными группами, т. е. группами преобразований (2.2), где функции f_i — линейные функции от всех аргументов x_j и a_u. Вейерштрасс доказал, что всякая коммутативная ассоциативная алгебра изоморфна прямой сумме нескольких полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Дедекинд рассматривал конечные алгебраические расширения поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, аналогичные расширениям Галуа полей $\mathbb{F}_p$ классов вычетов. Эти расширения рассматривались им как алгебры.

В 1892 г. Федор Эдуардович Молин (1861—1941) защитил в Дерпте (ныне Тарту) диссертацию «О системах высших комплексных чисел» [Мол]. В этой работе Молин перенес понятия простоты и полупростоты, применявшиеся Киллингом к алгебрам Ли, на ассоциативные

алгебры и нашел условие полупростоты комплексных ассоциативных алгебр в виде невырожденности квадратичной формы

$$\varphi = \sum_k \sum_h \sum_i \sum_j c_{ikh} c_{jhk} a_i a_j, \tag{2.52}$$

аналогичной форме (2.22). Молин доказал, что всякая простая комплексная алгебра изоморфна алгебре $\mathbb{C}_n$, а всякая полупростая комплексная алгебра изоморфна прямой сумме таких алгебр.

В 1898 г. Э. Штуди в статье [Stu1] определил алгебры, называемые в настоящее время алгеброй $\mathbb{H}'$ *антикватернионов* и алгеброй $\mathbb{H}^0$ *полукватернионов*. Алгебра $\mathbb{H}'$ обладает 4 единицами 1, i, e, f, $i^2 = -1$, $e^2 = +1$, $ie = -ei = f$. Алгебра $\mathbb{H}^0$ обладает 4 единицами 1, i, ε, η, $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $i\varepsilon = -\varepsilon i = \eta$. Алгебра $\mathbb{H}'$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}_2$, элементы алгебры $\mathbb{H}^0$ называют кватернионами Штуди. Впоследствии по аналогии с алгеброй $\mathbb{H}'$ Леонард Юджин Диксон (1874—1954) определил альтернативную алгебру $\mathbb{O}'$, элементы которой называются *антиоктонионами*, или *числами Кэли—Диксона*, а по аналогии с алгеброй $\mathbb{H}^0$ была определена алгебра $\mathbb{O}^0$ *полуоктонионов*.

Работы Картана об ассоциативных алгебрах

Заметки Картана 1897 г. [11] и [12] и его статья 1898 г. [13] были посвящены ассоциативным алгебрам, которые он называл системами «комплексных чисел». Картан определил «инвариантные подсистемы» этих систем, т. е. подалгебры, не изменяющиеся при умножении всех их элементов на произвольный элемент алгебры справа или слева. В настоящее время такие подалгебры называются «идеалами». Термин *идеал* появился следующим образом. Ассоциативные алгебры являются частными случаями колец. В кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел подкольца, обладающие этим свойством, состоят из чисел, кратных одному множителю. Эрнст Куммер (1810—1893), изучая кольца алгебраических чисел, обнаружил в них подкольца, обладающие этим свойством, но не состоящие из чисел с общим множителем. Куммер считал, что эти числа обладают общим «идеальным множителем». Позднейшие математики отказались от понятия идеального множителя, но сохранили память о термине Куммера в слове «идеал». Свойства идеалов алгебр аналогичны свойствам инвариантных подгрупп.

Картан определил также «псевдонулевые инвариантные подсистемы», аналогичные разрешимым инвариантным подгруппам. Эти подсистемы, являющиеся частными случаями идеалов, в настоящее время называются *радикалами* алгебр. Алгебра называется *простой*, если

она не содержит идеалов, и *полупростой*, если она не содержит радикалов. Полупростые алгебры изоморфны прямым суммам простых алгебр.

В заметке [11] Картан установил, что простые комплексные ассоциативные алгебры изоморфны алгебрам $\mathbb{C}_n$ — результат, незадолго до этого полученный Молиным. В заметке [12] Картан нашел, что простые вещественные алгебры изоморфны алгебрам $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{C}_n$ и $\mathbb{H}_n$. Поэтому алгебры альтернионов — простые или полупростые алгебры. В статье [13] были даны подробные доказательства результатов заметок [11] и [12].

Так как алгебра $\mathbb{C}_2$ изоморфна алгебре комплексных кватернионов, Картан называл элементы алгебры $\mathbb{C}_2$ «кватернионами». Следуя Джеймсу Джозефу Сильвестру (1814—1897), Картан называл элементы алгебры $\mathbb{C}_3$ «нонионами», а элементы алгебры $\mathbb{C}_n$ — «n^2-ионами».

Статья Картана [27] представляет собой расширенный французский перевод статьи [Stu1]. В этой статье к изложению Штуди алгебр $\mathbb{A}_n$ альтернионов Картан добавил обобщения этих алгебр, в которых m единиц i_k заменены единицами e_k, для которых $e_k^2 = 1$. В настоящее время эти алгебры называются алгебрами *псевдоальтернионов* и обозначаются $\mathbb{A}_{n,m}$. Алгебра $\mathbb{A}_{2,1}$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}'$, т. е. прямой сумме $\mathbb{R} + \mathbb{R}$, алгебры $\mathbb{A}_{3,1}$ и $\mathbb{A}_{3,2}$ изоморфны алгебре $\mathbb{H}'$, т. е. алгебре $\mathbb{R}_2$.

В работе [27] Картан установил, что алгебра $\mathbb{A}_{n,m}$ имеет ту же размерность, что и алгебра $\mathbb{A}_n$, и то же строение, что и алгебра $\mathbb{A}_{n-2m}$.

Псевдоальтернионы алгебры $\mathbb{A}_{n,m}$ при $n = 2m - 1$ и $n = 2m$ называются *антиальтернионами*. Алгебры $\mathbb{A}_{2m-1,m}$ изоморфны алгебрам $\mathbb{R}_N$ при $N = 2^m$, алгебры $\mathbb{A}_{2m,m}$ изоморфны алгебрам $\mathbb{R}_N + \mathbb{R}_N$.

Алгебры $\mathbb{CA}_n$ называются алгебрами *биальтернионов*. Алгебры $\mathbb{CA}_{2m-1}$ изоморфны алгебрам $\mathbb{C}_N$, где $N = 2^m$, алгебры $\mathbb{CA}_{2m}$ изоморфны алгебрам $\mathbb{C}_N + \mathbb{C}_N$.

Линейные представления комплексных простых групп Ли

В 1913 г. в работе «Проективные группы, не оставляющие инвариантным никакого плоского многообразия» [37] Картан построил теорию линейных представлений комплексных простых групп Ли.

Линейным представлением группы G называется гомоморфное или изоморфное отображение этой группы в группу вещественных или комплексных матриц или в группу линейных преобразований вещественного или комплексного линейного пространства.

Линейное представление называется *приводимым*, если линейное пространство представления содержит подпространство, остающееся инвариантным при преобразованиях, представляющих группу.

Линейное представление φ называется *вполне приводимым*, если пространство представления является прямой суммой инвариантных подпространств. В этих подпространствах определены линейные представления $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ группы G. В этом случае линейное представление φ называется *прямой суммой* линейных представлений φ_a и обозначается $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k$.

В статье [37] Картан вместо линейных преобразований линейного пространства рассматривал коллинеации проективного пространства, точки которого изображаются одномерными подпространствами линейного пространства.

Картан показал, что все линейные представления комплексных полупростых групп Ли вполне приводимы. Поэтому изучение общих линейных представлений этих групп сводится к изучению их неприводимых линейных представлений.

Линейное представление группы Ли G определяет линейное представление алгебры Ли этой группы. В диссертации [5] Картан фактически уже рассматривал один вид линейного представления комплексной простой группы Ли в ее алгебре Ли, определяемое преобразованием

$$x' = axa^{-1}. \tag{2.53}$$

Это представление в настоящее время называется *присоединенным линейным представлением* группы.

В статье [37] показывается, что так же, как в случае присоединенного представления, при любом неприводимом линейном представлении комплексной простой группы Ли линейные преобразования $A \to [HA]$, где A и H — матрицы линейного представления произвольного элемента α алгебры Ли и элемента h подалгебры Картана этой алгебры, имеют одни и те же собственные векторы. Собственные значения матриц этих линейных преобразований называются весами линейного представления. Веса линейных представлений, как и корни групп Ли, являются линейными формами элементов подалгебры Картана алгебры Ли и могут быть записаны в виде скалярных произведений $\omega = (\pi, h)$, где h — элемент подалгебры Картана, а вектор π называется весовым вектором.

Для весовых векторов, как и для всех элементов подалгебры Картана, можно определить понятие «больше», например, в смысле Дынкина. Поэтому понятие «больше» можно определить и для самих весов. Этим понятием пользовался и Картан в работе [37]. Для каждого линейного представления Картан определял максимальный вес, который он называл «старшим весом». Картан доказал, что неприводимое линейное пред-

ставление комплексной полупростой группы Ли полностью определяется старшим весом этого представления.

Для двух линейных представлений φ_1 и φ_2 группы G в линейных пространствах с координатами x_a и y_u можно определить линейное представление, которому подвергаются произведения $x_a y_u$. Это линейное представление называется «кронекеровским произведением» двух данных представлений и обозначается $\varphi_1\varphi_2$. Картан доказал, что если старшие веса линейных представлений φ_1 и φ_2 — формы ω_1 и ω_2, то старший вес кронекеровского произведения является формой $\omega_1 + \omega_2$.

Для всякого линейного представления φ группы G в линейном пространстве с координатами x_a можно определить линейное представление, которому подвергаются координаты $T_{a,b,\ldots,h}$ кососимметрического тензора k-й валентности. Это линейное представление называется k-й внешней степенью представления φ и обозначается $\varphi^{[k]}$. Картан доказал, что если старший вес представления φ — форма ω_1, а $k-1$ следующих за ним весов в порядке убывания являются формами $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$, то старший вес представления $\varphi^{[k]}$ имеет вид $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_k$.

Картан доказал также, что линейные представления комплексной простой группы Ли G являются кронекеровскими произведениями и внешними степенями нескольких фундаментальных представлений, число которых равно рангу группы*). Вейль в работе [Вей1] доказал, что представления комплексных простых групп Ли определяются простыми корневыми векторами этих групп. Весовые векторы π_i старших весов представлений комплексной простой группы Ли, образующие базис подалгебры Картана алгебры Ли этой группы, определяются простыми корневыми векторами α_i по формулам

$$\alpha_i = \sum_j a_{ij}\pi_j, \qquad \pi_i = \sum_j A_{ij}\alpha_j, \tag{2.54}$$

где (a_{ij}) — матрица Картана (2.33) комплексной простой группы Ли, а (A_{ij}) — матрица, обратная этой матрице.

Формулы (2.54) показывают, что весовые векторы π_i старших весов представлений комплексных простых групп Ли находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми корневыми векторами α_i этих групп. Поэтому представления φ_i комплексных простых групп Ли можно изображать теми же точками диаграмм Дынкина, что и простые корневые векторы α_i этих групп.

*) Далее в этом разделе, говоря о представлениях комплексных групп, мы имеем в виду фундаментальные линейные представления этих групп.

Из формул (2.54) видно также, что весовые векторы старших весов π_i представлений комплексных простых групп Ли являются линейными комбинациями корневых векторов α_i с рациональными коэффициентами. Весовые векторы старших весов произвольных линейных представлений являются линейными комбинациями векторов π_i с целыми коэффициентами и, следовательно, линейными комбинациями векторов α_i с рациональными коэффициентами.

Представлениями комплексной простой группы Ли класса A_n являются ее представление φ_1 матрицами группы $\mathbb{C}SL_{n+1}$ и внешние степени $\varphi_k = \varphi_1^{[k]}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, этого представления матрицами порядка C_{n+1}^k.

Представлениями комплексной простой группы Ли класса B_n являются ее представление φ_1 матрицами группы $\mathbb{C}SO_{2n+1}$, внешние степени $\varphi_k = \varphi_1^{[k]}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, этого представления матрицами порядка C_{2n+1}^k и представление φ_n матрицами порядка 2^n.

Представлениями комплексной простой группы Ли класса C_n являются ее представление φ_1 матрицами группы $\mathbb{C}Sp_{2n}$ и неприводимые представления $\varphi_k = \varphi_1^{[k]}$ матрицами порядка $C_{2n}^k - C_{2n}^{k-2}$, которые входят в состав внешних степеней $\varphi_1^{[k]}$, $k = 2, 3, \ldots, n$.

Представлениями комплексной простой группы Ли класса D_n являются ее представление φ_1 матрицами группы $\mathbb{C}SO_{2n}$, внешние степени $\varphi_k = \varphi_1^{[k]}$, $k = 2, 3, \ldots, n-2$, этого представления матрицами порядка C_{2n}^k и представления φ_{n-1} и φ_n матрицами порядка 2^{n-1}.

Будем обозначать весовые векторы старших весов представлений φ_i комплексных простых групп Ли буквами π_i с теми же индексами.

Так как присоединенное линейное представление комплексной простой группы Ли осуществляется в ее алгебре Ли, порядок матриц этого представления равен размерности r группы.

В случае группы класса A_n присоединенное линейное представление является кронекеровским произведением $\varphi_1\varphi_n$. В случае групп классов B_n и D_n присоединенное представление имеет вид φ_2. В случае группы класса C_n присоединенное представление есть φ_1^2.

Весовые векторы старших весов этих представлений имеют следующий вид:

$\pi_1 + \pi_n$ в случае группы A_n;

π_2 в случае групп B_n и D_n;

$2\pi_1$ в случае группы C_n.

Киллинг в работе [Kil2] и Картан в работе [5] рассматривали комплексные простые группы Ли в их присоединенном линейном представлении. Поэтому весовые векторы старших весов этих представлений

совпадают с максимальными корневыми векторами групп, т. е. с произведениями минимальных корневых векторов этих групп на -1. Этим объясняется тот факт, что точки диаграмм Дынкина, изображающие присоединенные линейные представления, совпадают с теми точками этих диаграмм, к которым присоединяются дополнительные точки расширенных диаграмм Дынкина.

Линейные представления φ_n группы B_n и φ_{n-1} и φ_n группы D_n в настоящее время называются *спинорными представлениями* групп ортогональных матриц. После того как физики открыли спин электрона и для его описания сформулировали понятие *спинора*, Картан вернулся к теории этих представлений и в 1938 г. подробно изложил эту теорию в книге «Теория спиноров» [164]. Спинорные представления групп B_n и D_n можно получить следующим образом: представим алгебру $\mathbb{C}\mathbb{A}_n$ биальтернионов как подалгебру алгебры $\mathbb{C}\mathbb{A}_{n+1}$, все единицы которой являются произведениями четного числа элементов i_k алгебры $\mathbb{C}\mathbb{A}_{n+1}$. В алгебре $\mathbb{C}\mathbb{A}_{n+1}$ рассмотрим n-мерную плоскость, состоящую из элементов $x = \sum\limits_k x_k i_k$, которую можно рассматривать как комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}R^n$, и преобразования (2.53), переводящие эту n-мерную плоскость в себя. Эти преобразования определяют в пространстве $\mathbb{C}R^n$ вращения вокруг точки, изображаемой нулевым элементом алгебры. Поэтому всякому биальтерниону a, определяющему преобразование (2.53), переводящее в себя n-мерную плоскость, и биальтерниону $-a$ соответствует одна и та же комплексная ортогональная матрица вращения пространства $\mathbb{C}R^n$. Биальтернионы a, обладающие указанным свойством, образуют группу, для которой группа комплексных ортогональных матриц n-го порядка изоморфна факторгруппе по инвариантной подгруппе, состоящей из элементов 1 и -1.

Эта группа биальтернионов называется *спинорной группой* группы комплексных ортогональных матриц. Представление группы комплексных ортогональных матриц биальтернионами ее спинорной группы называется *спинорным представлением* этой группы.

В случае группы $\mathbb{C}SO_{2n+1}$ спинорное представление осуществляется биальтернионами алгебры $\mathbb{C}\mathbb{A}_{2n+1}$, изоморфной алгебре $\mathbb{C}_N$, где $N = 2^n$.

В случае группы $\mathbb{C}SO_{2n}$ спинорное представление этой группы осуществляется биальтернионами алгебры $\mathbb{C}\mathbb{A}_{2n}$, изоморфной прямой сумме $\mathbb{C}_M + \mathbb{C}_M$, где $M = 2^{n-1}$.

В случае группы $\mathbb{C}SO_{2n+1}$ векторы комплексного линейного пространства, матрицы линейных преобразований которого осуществляют спинорное представление φ_n этой группы, называются *спинорами*.

В случае группы $\mathbb{C}SO_{2n}$ векторы комплексных линейных пространств, матрицы линейных преобразований которых осуществляют спинорные представления φ_{n-1} и φ_n, называются полуспинорами.

Картан показал, что порядки матриц представлений φ_1 и φ_2 группы G_2 равны 14 и 7. Первое из этих представлений — присоединенное, второе — представление в алгебре $\mathbb{CO}$ биоктонионов, группа автоморфизмов которой изоморфна группе G_2. Если ввести в алгебру $\mathbb{CO}$ метрику комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}R^8$, в которой расстояние между биоктонионами z и w равно квадратному корню из произведения $(w - z)(\overline{w} - \overline{z})$, то автоморфизмы алгебры $\mathbb{CO}$ изображаются вращениями этого пространства вокруг прямой, проходящей через элементы 0 и 1 этой алгебры. При этих вращениях переходит в себя семимерная плоскость, проходящая через элемент 0 перпендикулярно этой прямой. Представление φ_2 происходит в этой семимерной плоскости.

Из представлений группы F_4 отметим присоединенное представление φ_1 и представление φ_4 в 26-мерном пространстве биоктонионных эрмитово симметрических матриц третьего порядка с нулевым следом.

Из представлений группы E_6 отметим присоединенное представление φ_6 и представления φ_1 и φ_5 в 27-мерном пространстве биоктонионных эрмитово симметрических матриц третьего порядка.

Из представлений группы E_7 отметим присоединенное представление φ_6 и представление φ_1 в 56-мерном пространстве, определяемое дробно-линейными преобразованиями биоктонионных эрмитово симметрических матриц третьего порядка.

Из представлений группы E_8 отметим присоединенное представление φ_1.

Вещественные простые группы Ли

Классификацию вещественных простых групп Ли, особенно важную для геометрии вещественных пространств, Картан смог провести только в 1914 г. Этой классификации была посвящена его работа [38], в которой каждая группа рассматривалась с помощью специфических приемов.

Картан вернулся к этой проблеме в 1929 г. в работе «Замкнутые и открытые простые группы и риманова геометрия» [116] после того, как он разработал теорию симметрических римановых пространств. Определение инволютивных автоморфизмов групп, применявшихся в этой теории, дало Картану общий метод для нахождения вещественных простых групп Ли. Если работа [38] содержит 92 страницы, то работа [116] занимает только 20 страниц.

«Замкнутыми группами» Картан называл компактные вещественные группы Ли, а «открытыми группами» — некомпактные вещественные группы Ли. Комплексные группы Ли размерности r с координатами $z_j = x_j + iy_j$ можно также рассматривать как вещественные некомпактные группы Ли размерности $2r$ с координатами x_j и y_j.

В вещественных группах Ли форма Киллинга—Картана (2.22) вещественна. Как и в случае комплексных групп Ли, эта форма невырожденна для вещественных полупростых групп Ли и обращается в нуль для вещественных разрешимых групп Ли. Форма (2.22) является отрицательно определенной, т. е. приводится к сумме r отрицательных квадратов, для вещественных компактных полупростых групп Ли и является знаконеопределенной для вещественных некомпактных групп Ли. Если в последнем случае форма приводится к алгебраической сумме N отрицательных квадратов и P положительных квадратов, то разность $\delta = P - N$ называется характером вещественной полупростой группы.

Будем называть комплексные матрицы U порядка N *унитарными*, если они удовлетворяют условию

$$\bar{U}^T U = 1, \tag{2.55}$$

где U^T — матрица, полученная транспонированием матрицы U. Группа этих матриц обозначается $\mathbb{C}U_n$. Алгебра Ли этой группы состоит из комплексных косоэрмитовых матриц N-го порядка, т. е. матриц, удовлетворяющих условию

$$\bar{A}^T = -A. \tag{2.56}$$

Элементы матрицы U обозначим через $U_{ij} = V_{ij} + iW_{ij}$. Уравнение (2.55) можно переписать в виде

$$\sum_i U_{ij}\bar{U}_{ik} = \delta_{jk},$$

откуда следует, что

$$\sum_i \sum_j U_{ij}\bar{U}_{ij} = \sum_i \sum_j V_{ij}^2 + \sum_i \sum_j W_{ij}^2 = N.$$

Поэтому группа $\mathbb{C}U_N$ изображается пересечением гиперсферы радиуса $\sqrt{N}$ в $2N^2$-мерном евклидовом пространстве с алгебраической поверхностью. Так как гиперсфера евклидова пространства компактна, группа $\mathbb{C}U_N$ также компактна. Верен следующий результат: если G — подгруппа полной группы $\mathbb{C}GL_N$ комплексных матриц N-го порядка, то максимальная компактная подгруппа группы G является ее пересечением с группой $\mathbb{C}U_N$. Отсюда вытекает, что компактные вещественные простые

группы Ли классов A_n, B_n, C_n и D_n являются пересечениями комплексных простых групп Ли тех же классов с группами комплексных унитарных матриц.

Компактная простая группа класса A_n является группой $\mathbb{C}SU_{n+1}$ комплексных унитарных матриц $(n+1)$-го порядка с определителем 1. Алгебра Ли этой группы состоит из комплексных косоэрмитовых матриц $(n+1)$-го порядка со следом, равным нулю.

Компактная простая группа класса B_n является пересечением групп $\mathbb{C}SO_{2n+1}$ и $\mathbb{C}U_{2n+1}$. Эта группа изоморфна группе SO_{2n+1} вещественных ортогональных матриц $(2n+1)$-го порядка с определителем 1. Алгебра Ли этой группы состоит из вещественных кососимметрических матриц $(2n+1)$-го порядка.

Компактная простая группа класса C_n является пересечением групп $\mathbb{C}Sp_{2n}$ и $\mathbb{C}U_{2n}$. Картан в работе [107] отметил, что эта группа изоморфна группе $\mathbb{H}U_n$ кватернионных унитарных матриц n-го порядка, определяемых условием (2.55). Алгебра Ли этой группы состоит из кватернионных косоэрмитовых матриц n-го порядка и является прямой суммой алгебры Ли кватернионных косоэрмитовых матриц n-го порядка со следом, равным 0, и алгебры Ли группы автоморфизмов тела $\mathbb{H}$, изоморфной компактной простой группе A_1.

Компактная простая группа класса D_n является пересечением групп $\mathbb{C}SO_{2n}$ и $\mathbb{C}U_{2n}$. Эта группа изоморфна группе SO_{2n} вещественных ортогональных матриц $2n$-го порядка с определителем 1. Алгебра Ли этой группы состоит из вещественных кососимметрических матриц $2n$-го порядка.

Компактная простая группа класса G_2 является группой автоморфизмов альтернативного тела $\mathbb{O}$ октонионов. Эта группа представляется вещественными ортогональными матрицами седьмого порядка. Эти матрицы являются матрицами вращений семимерной плоскости в теле $\mathbb{O}$ с метрикой пространства R^8, перпендикулярной вещественной оси алгебры $\mathbb{O}$.

Эрнест Борисович Винберг (р. 1937) в работе [Вин] доказал, что алгебры Ли компактных простых групп Ли F_4, E_6, E_7 и E_8 изоморфны прямым суммам совокупностей косоэрмитовых матриц третьего порядка с элементами, соответственно, из тела $\mathbb{O}$ и из тензорных произведений $\mathbb{CO}$, $\mathbb{HO}$ и $\mathbb{O}^2$ со следом, равным 0, и алгебр Ли групп автоморфизмов тела $\mathbb{O}$ и указанных тензорных произведений. Первые две из этих групп автоморфизмов изоморфны компактной простой группе G_2, а две последние изоморфны прямым произведениям компактных простых групп G_2 и A_1 и двух групп G_2.

Для определения некомпактных простых групп Ли G', имеющих ту же комплексную форму $\mathbb{C}G$, что и компактная простая группа G, Картан в работе [116] применил следующий алгоритм, называемый в настоящее время «картановым алгоритмом». Картан находил все инволютивные автоморфизмы компактной группы G и определяемые ими инволютивные автоморфизмы в алгебре Ли $\mathbf{G}$ группы G. Всякий инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathbf{G}$ определяет представление алгебры Ли $\mathbf{G}$ в виде прямой суммы

$$\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{E}, \tag{2.57}$$

где $\mathbf{K}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathbf{G}$, состоящая из элементов, остающихся инвариантными при этом автоморфизме, а $\mathbf{E}$ — линейное подпространство, элементы которого умножаются при автоморфизме на -1. Алгебра Ли $\mathbf{G}'$ некомпактной простой группы G' имеет вид

$$\mathbf{G}' = \mathbf{K} + i\mathbf{E}, \tag{2.58}$$

где i — мнимая единица поля $\mathbb{C}$.

Формулу (2.10) для алгебры Ли группы G' можно записать в виде

$$[\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_b] = \sum_c c_{abc}\boldsymbol{e}_c, \quad [\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_u] = \sum_v c_{auv}\boldsymbol{e}_v, \quad [\boldsymbol{e}_u\boldsymbol{e}_v] = \sum_a c_{uva}\boldsymbol{e}_a, \tag{2.59}$$

где $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_b$, $\boldsymbol{e}_c$ — элементы базиса подалгебры $\mathbf{K}$, а $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$ — элементы базиса подпространства $\mathbf{E}$.

Формулу (2.10) для алгебры Ли группы G' можно записать в виде

$$[\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_b] = \sum_c c_{abc}\boldsymbol{e}_c, \quad [\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_u] = \sum_v c_{auv}\boldsymbol{e}_v, \quad [\boldsymbol{e}_u\boldsymbol{e}_v] = -\sum_a c_{uva}\boldsymbol{e}_a. \tag{2.60}$$

Инволютивными автоморфизмами компактной группы SO_N являются преобразования

$$X' = EXE, \tag{2.61}$$

где E — диагональная матрица, k диагональных элементов которой равны -1, а остальные диагональные элементы равны 1, и при $N = 2n$

$$X' = -JXJ. \tag{2.62}$$

Инволютивными автоморфизмами компактной группы $\mathbb{C}SU_{n+1}$ являются преобразования, удовлетворяющие условию (2.61), а также условиям

$$X' = \bar{X} \tag{2.63}$$

и

$$X' = -J\bar{X}J. \tag{2.64}$$

Инволютивными автоморфизмами компактной группы $\mathbb{H}U_n$ являются преобразования (2.61) и

$$X' = -iXi. \tag{2.65}$$

Применяя картанов алгоритм к компактной группе SO_N и ее инволютивному автоморфизму (2.61), мы получим группу $SO_{N,k}$ вещественных псевдоортогональных матриц с определителем 1. Псевдоортогональные матрицы удовлетворяют условию

$$U^T EU = E. \tag{2.66}$$

Применяя картанов алгоритм к компактным группам $\mathbb{C}SU_{n+1}$ и $\mathbb{H}U_n$ и их инволютивным автоморфизмам (2.61), мы получим группу $\mathbb{C}SU_{n+1,k}$ комплексных псевдоунитарных матриц с определителем 1 и группу $\mathbb{H}U_{n,k}$ кватернионных псевдоунитарных матриц. Псевдоунитарные матрицы удовлетворяют условию

$$\overline{U}^T EU = E. \tag{2.67}$$

Применяя картанов алгоритм к группе $\mathbb{C}SU_{n+1}$ и ее инволютивным автоморфизмам (2.63) и (2.64), мы получим группу $\mathbb{C}'SU_{n+1}$ двойных унитарных матриц, изоморфную группе SL_{n+1} вещественных матриц с определителем 1, и группу $\mathbb{C}'\mathbb{H}SU_{(n+1)/2}$ бикватернионных унитарных матриц, изоморфную группе $\mathbb{H}SL_{(n+1)/2}$ матриц с полуопределителем 1.

Применяя картанов алгоритм к группе $\mathbb{H}U_n$ и ее инволютивному автоморфизму (2.65), мы получим группу $\mathbb{H}'U_n$ антикватернионных унитарных матриц, изоморфную группе Sp_{2n} вещественных симплектических матриц, удовлетворяющих условию (2.17).

Применяя картанов алгоритм к группе SO_{2n} и ее инволютивному автоморфизму (2.62), мы получим группу $\mathbb{H}Sp_n$ кватернионных эрмитово симплектических матриц, удовлетворяющих условию

$$\overline{U}^T JU = J. \tag{2.68}$$

Группу SL_{n+1} Картан обозначал AI, группу $\mathbb{H}SL_{(n+1)/2}$ — AII,
группу $\mathbb{C}SU_{n+1,k}$ при $k > 1$ обозначал $AIII$, группу $\mathbb{C}SU_{n+1,1}$ — AIV,
группу $SO_{2n+1,k}$ при $k > 1$ Картан обозначал BI, группу $SO_{2n+1,1}$ — BII,
группу Sp_{2n} Картан обозначал CI, группу $\mathbb{H}U_{n,k}$ — CII,
группу $SO_{2n,k}$ при $k > 1$ Картан обозначал DI, группу $SO_{2n,1}$ — DII,
группу $\mathbb{H}Sp_n$ Картан обозначал $DIII$.

Характеры групп $\mathbb{C}SU_{n+1}$, $\mathbb{C}SU_{n+1,k}$, SL_{n+1}, $\mathbb{H}SL_{(n+1)/2}$ соответственно равны $-n(n+2)$, $4k(n-k+1)-n(n+2)$, n и $-n-2$.

Характеры групп SO_{2n+1} и $SO_{2n+1,k}$ равны $-n(2n+1)$ и $2k(2n-k+1)-$ $-n(2n+1)$.

Характеры групп $\mathbb{H}U_n$, $\mathbb{H}U_{n,k}$, Sp_{2n} соответственно равны $-n(2n+1)$, $8k(n-k)-n(2n+1)$ и n.

Характеры групп SO_{2n}, $SO_{2n,k}$ и $\mathbb{H}Sp_n$ соответственно равны $-n(2n-1)$, $2k(2n-k)-n(2n-1)$ и $-n$.

Картанов алгоритм применим к ассоциативным и альтернативным алгебрам. Применяя его к полю $\mathbb{C}$ и автоморфизму $x' = \bar{x}$, получим алгебру $\mathbb{C}'$ двойных чисел, применяя его к телу $\mathbb{H}$ и автоморфизму $x' = -ixi$, получим алгебру $\mathbb{H}'$ антикватернионов, применяя этот алгоритм к альтернативному телу $\mathbb{O}$ и автоморфизму $x' = \bar{x}$, оставляющему неподвижными элементы подалгебры $\mathbb{H}$, получим алгебру $\mathbb{O}'$ антиоктонионов.

Применяя картанов алгоритм к компактной группе G_2 и ее автоморфизму, порожденному автоморфизмом $x' = \bar{x}$ в теле $\mathbb{O}$, мы получим группу автоморфизмов алгебры $\mathbb{O}'$, являющуюся некомпактной группой G_2. Картан обозначал эту некомпактную группу G.

Характеры компактной и некомпактной групп G_2 равны -14 и 2. Алгебры Ли некомпактных групп F_4, E_6, E_7 и E_8 могут быть построены аналогично алгебрам Ли компактных групп тех же классов. В их построении косоэрмитовы матрицы могут быть заменены матрицами, удовлетворяющими условию $A^TE = -EA$, а поле $\mathbb{C}$ и тела $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ могут быть заменены алгебрами $\mathbb{C}'$, $\mathbb{H}'$ и $\mathbb{O}'$.

Картан обозначал некомпактные группы класса F_4 символами FI и FII, некомпактные группы класса E_6 — EI, EII, EIII и EIV, некомпактные группы класса E_7 — EV, EVI и EVII, некомпактные группы класса E_8 — EVIII и EIX.

Характеры компактной и некомпактных групп класса F_4 равны -52, -20 и 4,

класса E_6 равны -78, -26, -14, 2 и 6,

класса E_7 равны -133, -25, -5 и 7,

класса E_8 равны -248, -24 и 8.

Корневые векторы компактных полупростых групп чисто мнимы.

Среди некомпактных полупростых групп с общей комплексной формой имеется одна группа, все корневые векторы которой вещественны, эта группа называется *расщепленной* полупростой группой Ли.

Корневые векторы остальных некомпактных полупростых групп Ли с общей комплексной формой могут быть вещественны, чисто мнимы и мнимо сопряжены.

Корневые векторы вещественных полупростых групп Ли изображаются *диаграммами Сатаке*, являющимися модификациями диаграмм Дынкина, в которых вещественные корневые векторы изображаются белыми точками, чисто мнимые корневые векторы — черными точками,

а мнимо сопряженные корневые векторы — белыми точками, соединенными кривыми линиями с двумя стрелками. Эти диаграммы были предложены Итиро Сатаке (р. 1927) в работе [Sat].

Диаграммы Сатаке расщепленных групп совпадают с диаграммами Дынкина. Диаграммы Сатаке компактных групп совпадают с диаграммами Дынкина, все точки которых черные.

На рис. 2.10 а—р изображены диаграммы Сатаке некомпактных групп классов A_n, B_n, C_n и D_n. На рис. 2.11 а—l изображены диаграммы Сатаке некомпактных групп классов G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8.

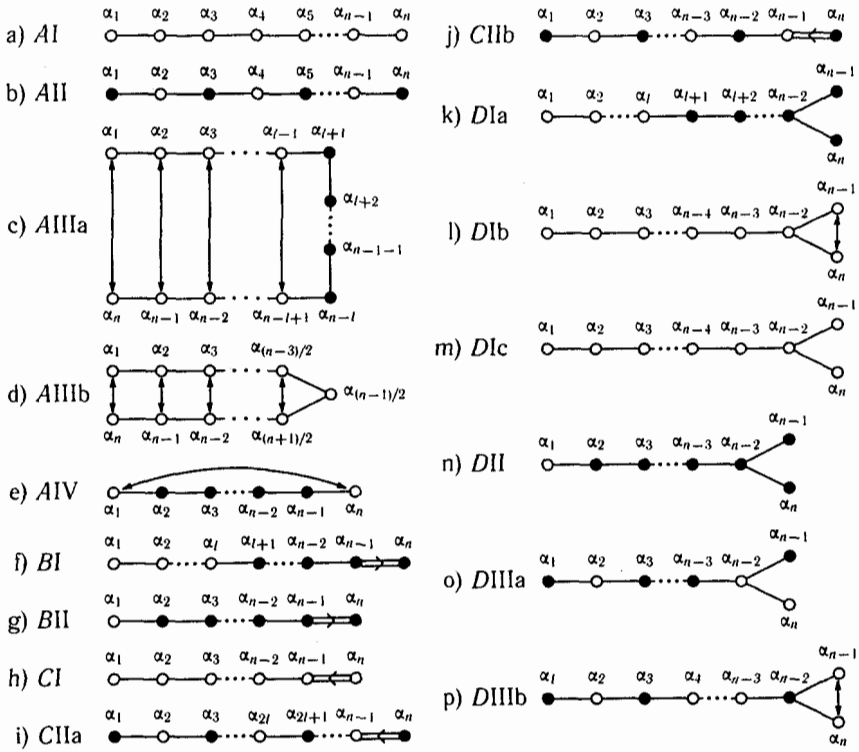


Рис. 2.10

Диаграмма Сатаке комплексной полупростой группы Ли, рассматриваемой как вещественная некомпактная группа двойной размерности, состоит из двух диаграмм Дынкина комплексной группы, соответственные точки которых соединены линиями с двумя стрелками.

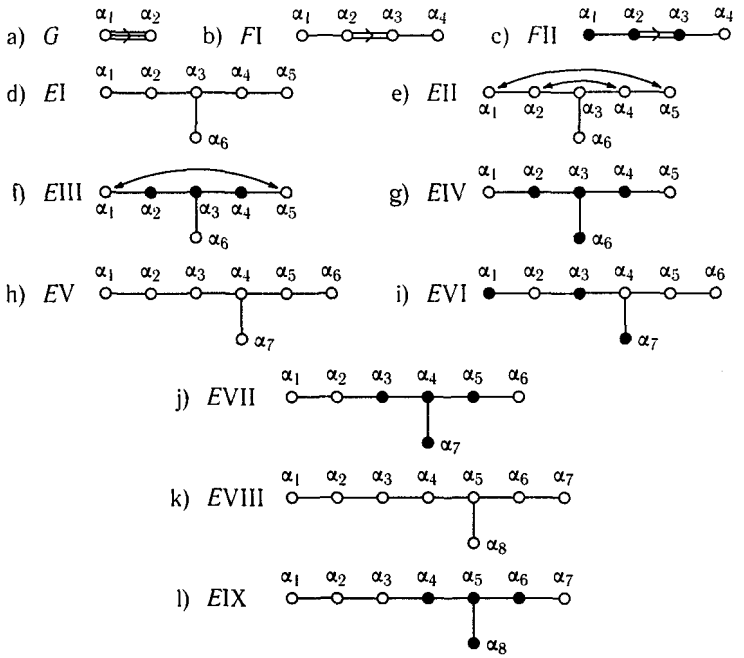


Рис. 2.11

В работе [38, с. 353—355] Картан указал все изоморфизмы между вещественными простыми группами Ли классов A_i, B_i, C_i, D_i: классов B_2 и C_2 и классов A_3 и D_3 и между двумя вещественными полупростыми группами D_2 и прямыми произведениями двух вещественных групп B_1, а также между третьей группой D_2 и комплексной простой группой B_1.

На рис. 2.12 a—k изображены диаграммы Сатаке этих групп.

В статье [39], написанной в том же 1914 г., что и работа [38], Картан построил теорию линейных представлений вещественных простых групп Ли, в которой нашел все неприводимые линейные представления этих групп.

Фундаментальные линейные представления вещественных простых групп Ли аналогичны фундаментальным линейным представлениям комплексных групп тех же классов.

Спинорные представления φ_{n-1} и φ_n групп SO_N определяются с помощью алгебр $\mathbb{A}_N$ альтернионов аналогично определению спинорных представлений групп $\mathbb{C}SO_N$ с помощью алгебр $\mathbb{CA}_N$ биальтернионов.

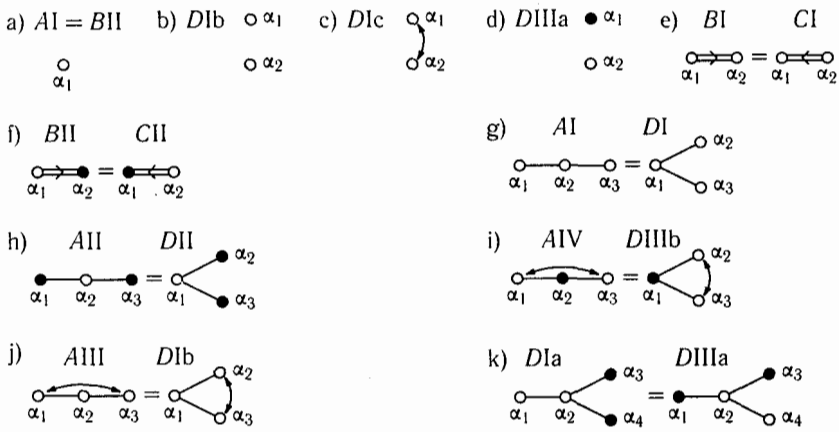


Рис. 2.12

Спинорные представления φ_{n-1} и φ_n групп $SO_{N,k}$ определяются таким же образом с помощью алгебр $\mathbb{A}_{N,k}$ псевдоальтернионов.

Топология групп Ли

После появления работы Вейля [Wey3] Картан начал рассматривать геометрию групп Ли в целом и топологическое строение этих групп. В работе 1930 г. [128] Картан установил, что всякая вещественная группа Ли G гомеоморфна (топологически эквивалентна) топологическому произведению максимальной компактной подгруппы K этой группы и евклидова пространства E, размерность которого равна разности размерностей групп G и K.

Среди компактных простых групп Ли с общей алгеброй Ли имеется одна односвязная группа, т. е. такая группа, что всякий замкнутый контур в этой группе может быть стянут в точку. Все остальные компактные простые группы Ли с общей алгеброй Ли изоморфны факторгруппам односвязной группы по ее конечным инвариантным подгруппам, называемым группами связности или группами Пуанкаре этих групп. Максимальной из этих подгрупп является ядро гомоморфизма односвязной компактной простой группы на присоединенную группу этой группы, т. е. на группу ее присоединенного представления. Все эти инвариантные подгруппы коммутативны. Число элементов группы связности присоединенной группы называется *индексом связности* компактной простой группы Ли. Этот индекс совпадает с индексом симметрии расширенной диаграммы Дынки-

на соответствующей комплексной простой группы Ли и с определителем матрицы Картана этой группы.

Индекс связности компактной простой группы Ли класса A_n равен $n+1$. Группа $\mathbb{C}SU_{n+1}$ этого класса односвязна. Инвариантная подгруппа этой группы, факторгруппа по которой совпадает с присоединенной группой, содержит $n+1$ матрицу — единичную матрицу I и ее произведения на степени комплексного числа с модулем 1 и аргументом $2\pi/(n+1)$.

Спинорные группы групп SO_N односвязны, группы SO_N являются факторгруппами спинорных групп по их инвариантным подгруппам, состоящим из альтернионов 1 и -1. Группа SO_{2n+1} совпадает с присоединенной группой. Группа SO_{2n} не совпадает с присоединенной группой, которая изоморфна ее факторгруппе по ее инвариантной подгруппе, состоящей из единичной матрицы I и матрицы $-I$.

Группа $\mathbb{H}U_n$ односвязна, ее присоединенная группа изоморфна ее факторгруппе по инвариантной подгруппе, состоящей из матриц I и $-I$.

Инвариантные подгруппы односвязных компактных групп E_6 и E_7, факторгруппы по которым изоморфны присоединенным группам этих групп, определяются следующим образом. Алгебры Ли этих групп состоят из матриц третьего порядка с элементами из тензорных произведений $\mathbb{CO}$ и $\mathbb{HO}$ и элементов алгебр Ли групп автоморфизмов поля $\mathbb{C}$ и тел $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. Поэтому указанные инвариантные подгруппы изоморфны инвариантным подгруппам групп $\mathbb{C}SU_3$ и $\mathbb{H}U_2$, т. е. инвариантная подгруппа односвязной группы E_6 состоит из единичной матрицы I третьего порядка и ее произведений на комплексные числа единичного модуля с аргументами $2\pi/3$ и $4\pi/3$, а инвариантная подгруппа группы E_7 состоит из матриц I и $-I$. Отсюда видно, что индексы связности групп E_6 и E_7 равны 3 и 2.

Работы Картана [111] и [154] посвящены определению важнейших топологических инвариантов компактных вещественных простых групп Ли — чисел Бетти b_k этих групп. Так как эти числа для произвольных топологических многообразий были определены Пуанкаре, Картан назвал многочлен $P(t)=\sum_k b_k t^{n-k}$ *полиномом Пуанкаре*. Развивая идеи Картана, Лев Семенович Понтрягин (1908—1988) в работе 1935 г. [Пон1] вычислил числа Бетти нескольких односвязных компактных простых групп Ли. Шевалле в работе [Шев] 1955 г. привел общую формулу полинома Пуанкаре для любой односвязной компактной простой группы Ли:

$$P(t)=\prod_i (t^{2A(i)+1}+1), \tag{2.69}$$

где $A(i)=a_i$ — *показатели* (2.46) этих групп.

Конечные группы типа Ли

Можно определить не только комплексные и вещественные группы Ли, но и группы Ли, параметры которых являются элементами любых полей. Многие такие группы рассматривались в работе [Шев]. Для определения этих групп над конечными полями $\mathbb{F}_q$ строится алгебра Ли со структурными константами из этого поля и определяется группа, переводящая эту алгебру Ли в себя. Полученная группа является конечной группой, причем в том случае, когда структурные константы определяют простую группу Ли, конечная группа является простой конечной группой или обладает простой инвариантной подгруппой. Полученные простые конечные группы называются *конечными простыми группами типа Ли*. Шевалле показал, что число элементов конечной простой группы Ли G, построенной над полем $\mathbb{F}_q$, равно

$$\operatorname{card} G = (q^N/u)\prod_i (q^{A(i)+1} - 1), \tag{2.70}$$

где N — число положительных корней комплексной простой группы Ли, соответствующей группе G, u — число элементов центра группы G, а числа $A(i) = a_i$ — показатели (2.46) комплексной простой группы Ли, соответствующей группе G. Кроме конечных простых групп типа Ли, определенных указанным образом, имеются также конечные простые группы типа Ли, называемые «2-скрученными», и еще одна конечная простая группа типа Ли, называемая «3-скрученной». 2-скрученные группы являются модификациями конечных простых групп типа Ли классов A_n, D_n и E_6, для которых диаграммы Дынкина обладают двусторонней симметрией. Эти группы характеризуются диаграммами Сатаке, приведенными на рис. 2.10 d, k и 2.11 e. Числа элементов этих групп, соответственно, равны

$$(q^N/u)\prod_i (q^{i+1} - (-1)^{i+1}), \qquad (q^N/u)(q^n + 1)\prod_i (q^{2i} - 1),$$

$$(q^N/u)(q^{12} - 1)(q^9 + 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^5 + 1)(q^2 - 1).$$

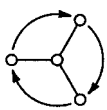


Рис. 2.13

3-скрученная группа является модификацией конечной простой группы типа Ли класса D_4, для которой диаграмма Дынкина обладает трехсторонней симметрией. Эта группа характеризуется диаграммой Сатаке, приведенной на рис. 2.13. Число элементов этой группы равно

$$(q^N/u)(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$$

(см. статью Титса [Ti4, с. 213—214]).

Редуктивные и квазиредуктивные группы Ли

Полупростые группы Ли — частные случаи *редуктивных групп* Ли, алгебры Ли которых являются прямыми суммами простых алгебр Ли без требования их некоммутативности. Термин «редуктивные группы» был введен Арманом Борелем (р. 1923) и Титсом в 1965 г. в их работе [BoT]. Все коммутативные и все компактные группы Ли являются редуктивными группами. Редуктивными группами являются также группы GL_n и $\mathbb{C}GL_n$ всех невырожденных вещественных и комплексных матриц n-го порядка.

В том случае, когда редуктивная группа G является группой автоморфизмов коммутативной группы R, можно определить *квазиредуктивную группу*, являющуюся полупрямым произведением групп G и R, т. е. множеством пар (g, r), где g — элемент группы G, а r — элемент группы R, с умножением по правилу

$$(g_1, r_1)(g_2, r_2) = (g_1 g_2, r_1 + g_1 r_2), \tag{2.71}$$

причем $g_1 r_2$ — результат действия автоморфизма g_1 на элемент r_2. Наиболее важные примеры этих групп — группы аффинных преобразований вещественного и комплексного аффинных пространств E^n и $\mathbb{C}E^n$.

Более общий случай квазиредуктивной группы мы получим, если коммутативная группа R обладает двумя редуктивными группами автоморфизмов G и H, действия которых на элемент r группы R имеют вид gr и rh. Эта квазиредуктивная группа является множеством троек (g, h, r) с умножением по правилу

$$(g_1, h_1, r_1)(g_2, h_2, r_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2, r_1 h_2 + g_1 r_2). \tag{2.72}$$

Такими группами являются группы квазиаффинных преобразований *квазиаффинных пространств* $E^{m,n}$ и $\mathbb{C}E^{m,n}$, т. е. проективных пространств P^n и $\mathbb{C}P^n$ с выделенной m-мерной плоскостью (квазиаффинные преобразования — коллинеации, переводящие в себя выделенную плоскость).

Если группы G и H — полупростые группы Ли, то квазиредуктивная группа называется *квазипростой группой Ли*. Алгебра Ли такой группы может быть получена из алгебры Ли полупростой группы, записанной в виде (2.57), с помощью перехода к алгебре Ли

$$\mathbf{G}^0 = \mathbf{K} + \varepsilon \mathbf{E}, \tag{2.73}$$

где ε — дуальная единица алгебры $\mathbb{C}^0$.

Переход от алгебры Ли (2.57) к алгебре Ли (2.73), так же как и переход от группы Ли, соответствующей первой алгебре, к группе Ли, соот-

ветствующей второй алгебре, называется *квазикартановым алгоритмом*. Общее определение квазипростых групп Ли было дано в 1954 г. Кацуми Номидзу (р. 1924) в работе [Nom, с. 50] и в 1957 г. Марселем Берже (р. 1927) в работе [Beg2, с. 93]. Израиль Моисеевич Гельфанд (р. 1913) в работе [БГГН] называл группы Ли, полученные картановым и квазикартановым алгоритмами, «двойственными и тройственными по Картану».

Если в определении квазиредуктивной группы заменить редуктивную группу G на квазиредуктивную, мы получим *биквазиредуктивную группу Ли*. Аналогичным образом определяются *триквазиредуктивные* и *r-квазиредуктивные группы Ли*, а также *биквазипростые*, *триквазипростые* и *r-квазипростые*.

Группа движений евклидова пространства R^n является квазипростой группой Ли, группы движений изотропных пространств, которые Картан рассматривал в работах [66] и [147a], являются биквазипростыми группами Ли.

Глава 3

Проективные пространства и проективные метрики

Проективные и аффинные пространства

В заголовках работ [37] и [39] Картан называл представления простых групп Ли «проективными группами», т. е. группами проективных преобразований (коллинеаций) проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ и P^n. Мы видели, что комплексные простые группы Ли классов A_n, B_n, C_n и D_n представляются, соответственно, группами коллинеаций пространства $\mathbb{C}P^n$, группами движений неевклидовых пространств $\mathbb{C}S^{2n}$, группами симплектических преобразований симплектического пространства $\mathbb{C}Sy^{2n-1}$ и группами движений неевклидова пространства $\mathbb{C}S^{2n-1}$. Вещественные простые группы Ли допускают аналогичные геометрические интерпретации в вещественных формах этих пространств: в вещественном проективном пространстве P^n, в вещественных неевклидовых пространствах — эллиптических пространствах S^{2n} и S^{2n-1}, гиперболических пространствах H^{2n} и H^{2n-1}, псевдоэллиптических пространствах S_k^{2n} и S_k^{2n-1}, псевдогиперболических пространствах H_k^{2n} и H_k^{2n-1} и в симплектическом пространстве Sy^{2n-1}.

Многие из этих пространств рассматривались в статье Картана «Теория непрерывных групп и геометрия» [46] и в его книге «Лекции о комплексной проективной геометрии» [134]. Первым из этих пространств, отличных от евклидова пространства, было определено гиперболическое пространство H^3. Геометрия этого пространства была впервые изложена Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856) в 1829 г. в статье «О началах геометрии» [Лоб]. В 1832 г. к той же геометрии пришел Янош Бойаи (1802—1860) в работе [Бол]. После смерти К. Ф. Гаусса, когда стали известны его письма и записи [Гау2], выяснилось, что он пришел к этой геометрии еще до Лобачевского, но не публиковал своих результатов. Геометрия Лобачевского была признана широкими кругами математиков только в 70-х годах XIX в. после выхода в свет основных трудов Лобачевского на немецком, французском и итальянском языках,

писем и записок Гаусса, а также после появления интерпретации Эудженио Бельтрами (1835—1900) геометрии Лобачевского в круге евклидовой плоскости.

Это признание было подготовлено также рядом важнейших открытий геометров XIX века. В середине этого века учение о проективных свойствах фигур превратилось в самостоятельную проективную геометрию, которая в «Геометрии положения» [Sta] Христиана фон Штаудта (1798—1867) была освобождена от определений, основанных на евклидовой геометрии.

В 1859 г. А. Кэли в «Шестом мемуаре о формах» [Кэл] показал, что евклидову плоскость можно рассматривать как проективную плоскость с выделенной «бесконечно удаленной прямой» и двумя мнимыми «циклическими точками» на ней, в которых эта прямая пересекается со всеми окружностями плоскости. Кэли доказал, что эллиптическую плоскость, т. е. сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками, можно представить как ту же проективную плоскость, на которой задано мнимое коническое сечение, и пришел к выводу, что «метрическая геометрия является, таким образом, частью проективной геометрии и проективная геометрия представляет собой всю геометрию» [Кэл, с. 245—246].

В это же время в работах Августа Фердинанда Мёбиуса (1790—1868) учение об аффинных свойствах фигур превратилось в аффинную геометрию, а учение о круговых преобразованиях на плоскости, порождаемых инверсиями относительно окружностей, превратилось в конформную геометрию. Одновременно с плоскими геометриями были созданы геометрии трехмерных проективного, аффинного и конформного пространств. После появления в книге Грассмана [Gra] многомерного евклидова пространства R^n были определены многомерные гиперболическое пространство H^n, эллиптическое пространство S^n, проективное пространство P^n, аффинное пространство E^n, конформное пространство C^n и симплектическое пространство Sy^{2n-1}.

В основе определения всех этих многомерных пространств лежит определение n-мерного *линейного*, или *векторного*, *пространства* L^n. Пространство L^n представляет собой коммутативную группу, элементы которой называются векторами, а групповая операция — сложением. В пространстве L^n определена также операция умножения векторов на вещественные числа («скаляры»), дистрибутивная относительно сложения векторов. В пространстве L^n имеются n линейно независимых векторов, а всякие $n+1$ векторов линейно зависимы.

Аффинное пространство E^n представляет собой множество элементов, называемых точками, причем каждые две точки A и B определяют вектор $\boldsymbol{a} = AB$ пространства L^n, для всякой точки A и вектора $\boldsymbol{a}$ имеется такая точка B, что $\boldsymbol{a} = AB$, и для всяких трех точек A, B, C вектор AC равен сумме $AB + BC$.

Проективное пространство P^n представляет собой расширение пространства E^n: точки P^n находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми, проходящими через точку пространства E^{n+1}. Векторы пространства E^{n+1}, направленные по этим прямым, называются векторами, представляющими точки проективного пространства. Картан в своих работах по проективной геометрии называл эти векторы «аналитическими точками» проективного пространства, в отличие от обычных геометрических точек.

Если в пространстве E^n задан векторный базис, состоящий из n линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_i$ с общим началом O, то всякая точка M этого пространства определяет радиус-вектор $\boldsymbol{x} = OM$. Если $\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$, то числа x_i называются *аффинными координатами* точки M.

Если в пространстве E^{n+1} задан базис, состоящий из векторов $\boldsymbol{e}_i$, и если точка M пространства P^n представляется вектором $\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$, то числа x_i, определенные с точностью до общего ненулевого множителя, называются *проективными координатами* точки M.

Прямые линии пространства E^n определяются уравнениями

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}t, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой. Аналогично, m-мерные плоскости пространства E^n определяются уравнениями

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_a \boldsymbol{a}_a t_a, \tag{3.2}$$

где $a = 1, 2, \ldots, m$, $\boldsymbol{a}_a$ суть m линейно независимых векторов.

Гиперплоскости, т. е. $(n - 1)$-мерные плоскости пространства E^n, определяются уравнениями

$$\sum_i u_i x_i + v = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Прямые линии пространства P^n определяются уравнениями

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 t_0 + \boldsymbol{x}_1 t_1, \tag{3.4}$$

m-мерные плоскости пространства P^n определяются уравнениями

$$x = \sum_a a_a t_a, \tag{3.5}$$

где $a = 0, 1, \ldots, m$. Гиперплоскости пространства P^n определяются уравнениями

$$\sum_i u_i x_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Коэффициенты u_i называются *тангенциальными координатами* гиперплоскости.

Пространство P^n можно рассматривать как пространство E^n, дополненное бесконечно удаленной гиперплоскостью, являющейся пространством P^{n-1}. Параллельные прямые пространства E^n имеют общую бесконечно удаленную точку.

Аффинные преобразования пространства E^n и *коллинеации* пространства P^n, т. е. взаимно однозначные преобразования этих пространств, переводящие прямые в прямые, имеют соответственно вид

$$x_i = \sum_j A_{ij} x_j + a_i, \tag{3.7}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, и

$$x_i = \sum_j A_{ij} x_j, \tag{3.8}$$

где $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Преобразования (3.7) пространства E^n образуют квазиредуктивную группу Ли, а преобразования (3.8) пространства P^n образуют некомпактную простую группу Ли класса A_n. Преобразования

$$u_i = \sum_j A_{ij} x_j, \tag{3.9}$$

переводящие точки пространства P^n в гиперплоскости, называются *корреляциями*. Коллинеации (3.8) вместе с корреляциями (3.9) образуют группу проективных преобразований пространства P^n.

Тот факт, что точки пространства P^n определяются $n + 1$ проективными координатами x_i, заданными с точностью до общего ненулевого множителя, а гиперплоскости этого пространства определяются $n + 1$ тангенциальными координатами, также заданными с точностью до общего ненулевого множителя, причем условие (3.6) взаимной принадлежности точки и гиперплоскости симметрично относительно координат x_i и u_i, лежит в основе принципа двойственности пространства P^n. В силу

этого принципа всякой теореме геометрии этого пространства соответствует другая теорема, получаемая из нее взаимной заменой слов «точка» и «гиперплоскость» и выражений «точка лежит на гиперплоскости» и «гиперплоскость проходит через точку». По принципу двойственности m-мерные плоскости, определяемые $m+1$ независимыми точками, соответствуют $(n-m-1)$-мерным плоскостям, которые являются пересечениями $m+1$ независимой гиперплоскости.

При аффинных преобразованиях сохраняются *простые отношения* троек точек прямой

$$V(X, Y; Z) = \frac{XZ}{ZY}, \tag{3.10}$$

а при коллинеациях сохраняются *двойные отношения* четверок точек прямой

$$W(X, Y; Z, U) = \frac{XZ}{ZY} : \frac{XU}{UY}. \tag{3.11}$$

Две точки X и Y и две гиперплоскости α и β пространства P^n определяют *двойное отношение*

$$W(X, Y; \alpha, \beta) = \Big(\sum_i u_i y_i \cdot \sum_i v_i x_i\Big) \Big/ \Big(\sum_i u_i x_i \cdot \sum_i v_i y_i\Big). \tag{3.12}$$

Если прямая XY пересекается с гиперплоскостями α и β в точках Z и U, то $W(X, Y; Z, U) = W(X, Y; \alpha, \beta)$.

Евклидовы пространства

Если в аффинном пространстве E^n определено скалярное произведение векторов

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_i, \tag{3.13}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, и если квадратичная форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно определенная, то пространство E^n становится *евклидовым пространством* R^n, в котором расстояние XY между точками с радиус-векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равно

$$XY = \sqrt{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})}. \tag{3.14}$$

Движения пространства R^n являются преобразованиями (3.7), сохраняющими скалярные произведения векторов (3.13). В случае, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) являются ортогональными матрицами.

Все *гиперсферы*

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = r^2 \tag{3.15}$$

пространства R^n пересекаются с бесконечно удаленной гиперплоскостью этого пространства по одной и той же мнимой квадрике.

В том случае, когда квадратичная форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ является знакоопределенной и приводится к алгебраической сумме k отрицательных квадратов и $n-k$ положительных квадратов, пространство E^n становится *псевдоевклидовым пространством* R_k^n *индекса* k. Расстояния между точками X и Y этого пространства определяются по той же формуле (3.14), что и в пространстве R^n, однако в пространстве R_k^n расстояния XY могут быть чисто мнимыми или равными нулю.

Движения пространства R_k^n являются преобразованиями (3.7), сохраняющими скалярные произведения векторов (3.13). В том случае, когда $a_{ij} = e_i\delta_{ij}$, где $e_i = \pm 1$, матрицы (A_{ij}) являются псевдоортогональными матрицами индекса k. Группы движений пространств R^n, R_k^n являются квазипростыми группами Ли.

Все гиперсферы пространства R_k^n пересекаются с бесконечно удаленной гиперплоскостью этого пространства по вещественной квадрике. Радиусы r гиперсфер пространства R_k^n могут быть вещественными, чисто мнимыми и равными нулю. В пространстве R_k^n гиперсферы нулевого радиуса являются гиперконусами, а гиперсферы ненулевого радиуса являются гиперболоидами.

Эллиптическое и гиперболическое пространства

Эллиптическое пространство S^n представляет собой проективное пространство P^n, в котором задана мнимая гиперквадрика

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_i \sum_j a_{ij}x_ix_j = 0, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.16}$$

где квадратичная форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ положительно определенная. Мнимая гиперквадрика (3.16) называется *абсолютом* пространства S^n.

Если X_0 — точка пространства P^n, представленная вектором x_0, то гиперплоскость $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) = 0$ называется *полярной гиперплоскостью* точки X_0 относительно гиперквадрики (3.16), а точка X_0 называется *полюсом* этой гиперплоскости. Корреляция (3.9), где $A_{ij} = a_{ij} = a_{ji}$, переводит всякую точку пространства P^n в ее полярную гиперплоскость относительно гиперквадрики (3.16), а всякую гиперплоскость — в ее полюс. Эта корреляция называется *полярным преобразованием* относительно гиперквадрики.

Расстояние d между точками X и Y пространства S^n определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных гиперплоскостей α и β относительно абсолюта этого пространства по формуле

$$\cos^2\left(\frac{d}{r}\right) = W(X, Y; \alpha, \beta). \tag{3.17}$$

Число r называется *радиусом кривизны* пространства S^n, а число $1/r^2$ называется *кривизной* этого пространства. Пространство S^n изометрично гиперсфере радиуса r пространства R^{n+1} с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Движения пространства S^n являются коллинеациями, переводящими в себя абсолют этого пространства. В том случае, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) являются ортогональными матрицами.

Овальная гиперквадрика (3.16), т. е. гиперквадрика индекса 1, делит пространство P^n на две области. Область, в которой $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) < 0$, представляет собой *гиперболическое пространство* H^n. Гиперквадрика, ограничивающая эту область, называется *абсолютом* пространства H^n.

Расстояние d между точками X и Y пространства H^n определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных гиперплоскостей α и β относительно абсолюта этого пространства по формуле

$$\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{q}\right) = W(X, Y; \alpha, \beta). \tag{3.18}$$

Число qi называется *радиусом кривизны* пространства H^n, а число $-1/q^2$ называется *кривизной* этого пространства.

Гиперквадрика (3.16) индекса k делит пространство P^n на две области: внешнюю, где $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, называемую *псевдоэллиптическим пространством* S^n_k, и внутреннюю, где $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) < 0$, называемую *псевдогиперболическим пространством* H^n_{k-1}.

Сама гиперквадрика (3.16), разделяющая эти области, называется *абсолютом* пространств S^n_k и H^n_{k-1}. Расстояния в пространствах S^n_k и H^n_{k-1} определяются соответственно формулами (3.17) и (3.18). Числа r и qi называются *радиусами кривизны* этих пространств, а числа $1/r^2$ и $-1/q^2$ называются их *кривизнами*.

Пространство S^n_k радиуса кривизны r изометрично гиперсфере радиуса r пространства R^{n+1}_k с отождествленными диаметрально противоположными точками. Пространства H^n и H^n_k радиуса кривизны qi изометричны гиперсферам радиуса qi пространств R^{n+1}_1 и R^{n+1}_{k+1} с отождествленными диаметрально противоположными точками. Движения пространств H^n, S^n_k и H^n_k являются коллинеациями этих пространств, переводящими в себя их абсолюты. В случае, когда $a_{ij} = e_i\delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) этих движений являются псевдоортогональными матрицами соответственно индексов 1, k и $k+1$.

Группы движений эллиптических пространств S^{2n} и S^{2n-1} являются компактными простыми группами Ли классов B_n и D_n, группы движений пространств H^{2n} и H^{2n-1}, S^{2n}_k и S^{2n-1}_k, H^{2n}_k и H^{2n-1}_k являются некомпактными простыми группами Ли тех же классов.

Если в качестве абсолютов пространств S^n и H^n взяты гиперсферы мнимого и вещественного радиусов пространства R^n, мы получим интерпретации пространств S^n и H^n в пространстве R^n. Последняя из этих интерпретаций называется «интерпретацией в гипершаре», при $n = 2$ эта интерпретация совпадает с *интерпретацией Бельтрами* плоскости H^2 в круге плоскости R^2. Аналогично определяются интерпретации пространств S_k^n и H_k^n в пространстве R_k^n.

Интерпретации пространств S^n и H^n в пространстве P^n были предложены Ф. Клейном. Геометрия пространств R_k^n стала изучаться после открытия специальной теории относительности А. Эйнштейна, в которой физическое пространство-время представляет собой пространство R_1^4. Обозначения R_k^n, S_k^n и H_k^n были введены Дж. Вольфом в книге [Вол].

Конформные пространства

Если при интерпретации пространства H^{n+1} в гипершаре пространства R^{n+1} произвести стереографическую проекцию гиперсферы из ее полюса S на экваториальную гиперплоскость, мы получим отображение гиперсферы пространства R^{n+1} на пространство R^n. Это отображение станет взаимно однозначным, если мы дополним пространство R^n одной бесконечно удаленной точкой, соответствующей точке S. Пространство R^n, дополненное таким образом, называется *конформным пространством* C^n.

Конформными преобразованиями пространства C^n называются его преобразования, определяемые движениями пространства H^{n+1}. При этих преобразованиях гиперсферы пространства C^n переходят в гиперсферы и сохраняются углы между кривыми.

Аналогичная стереографическая проекция гиперсферы мнимого радиуса в пространстве R_1^{n+1} на экваториальную гиперплоскость, являющуюся пространством R^n, определяет конформную интерпретацию пространства H^n в гипершаре пространства C^n. Эта интерпретация при $n = 2$ совпадает с интерпретацией Пуанкаре [Пуа1] плоскости H^2 в круге или на полуплоскости плоскости R^2.

Стереографическая проекция гиперсферы пространства R_k^{n+1} из ее полюса S на экваториальную гиперплоскость определяет *псевдоконформное пространство* C_k^n, получаемое из пространства R_k^n его дополнением бесконечно удаленной точкой, соответствующей точке S, и *идеальными точками*, соответствующими точкам пересечения гиперсферы с гиперплоскостью, касательной к ней в точке S. *Конформными преобразованиями* этого пространства называются его преобразования, определяемые движениями пространства H_k^{n+1}.

Группы конформных преобразований пространств C^n и C^n_k изоморфны группам движений пространств H^{n+1} и H^{n+1}_k, т. е. при $n = 2m - 1$ являются некомпактными простыми группами Ли класса B_m, а при $n = 2m - 2$ — некомпактными простыми или полупростыми группами Ли класса D_m.

Пуанкаре в работе [Пуа2] предложил интерпретацию плоскости H^2 на двуполостном гиперболоиде, равносильную интерпретации этой плоскости на сфере мнимого радиуса пространства R^3_1. Проектируя эту сферу из ее центра на плоскость, касательную к ней, мы получим интерпретацию Бельтрами плоскости H^2 в круге евклидовой плоскости (рис. 3.1). Проектируя эту сферу из ее полюса на экваториальную плоскость, мы получим интерпретацию Пуанкаре плоскости H^2 в круге евклидовой плоскости (рис. 3.2).

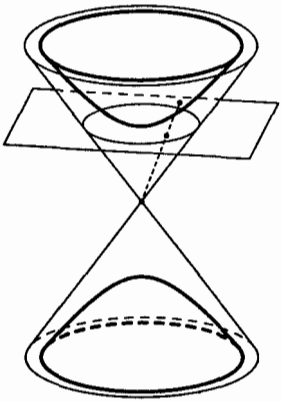


Рис. 3.1

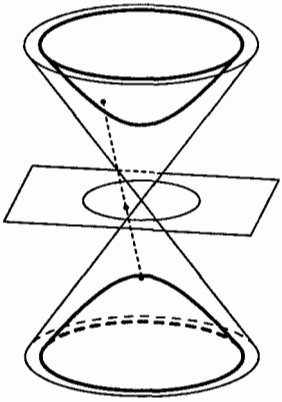


Рис. 3.2

Пространства R^n, P^n, S^n, H^n и C^n рассматривались Клейном в его «Эрлангенской программе» [Кле2].

Симплектические пространства

Симплектическое пространство Sy^{2n-1}, которое в XIX в. называли «пространством линейного комплéкса», представляет собой проективное пространство P^{2n-1}, в котором задан *линейный комплéкс* прямых, т. е. семейство прямых, определяемое в *плюккеровых координатах* прямых XY

$$p_{ij} = x_i y_j - y_i x_j \tag{3.19}$$

одним линейным уравнением

$$\sum_i \sum_j a_{ij} p_{ij} = 0, \tag{3.20}$$

где $a_{ij}=-a_{ji}$. Корреляция (3.9), где $A_{ij}=a_{ij}=-a_{ji}$, называется *нуль-системой*. В том случае, когда пространство Sy^{2n-1} определяется линейным комплексом (3.20), он называется *абсолютным линейным комплексом* этого пространства, а нуль-система, определяемая этим линейным комплексом, называется *абсолютной нуль-системой* пространства Sy^{2n-1}.

Симплектическими преобразованиями пространства Sy^{2n-1} называются коллинеации этого пространства, переводящие в себя его абсолютный линейный комплекс. Группа симплектических преобразований пространства Sy^{2n-1} является некомпактной простой группой Ли класса C_n.

Если $s = XY$ и $t = ZU$ — две прямые пространства Sy^{2n-1}, а σ и θ — $(2n-3)$-мерные плоскости, соответствующие этим прямым в абсолютной нуль-системе, и трехмерная плоскость, определяемая прямыми s и t, высекает из этих $(2n-3)$-мерных плоскостей прямые s' и t', то все прямые, пересекающиеся с прямыми s, t, s', t', высекают из них четверки точек с одним и тем же двойным отношением, которое мы будем обозначать $W(s, t; \sigma, \theta)$. Это двойное отношение является *симплектическим инвариантом* двух прямых пространства Sy^{2n-1}.

Абсолютная нуль-система пространства Sy^{2n-1} переводит каждую точку этого пространства в гиперплоскость, проходящую через нее. Прямые и m-мерные плоскости пространства Sy^{2n-1}, которые абсолютная нуль-система переводит в $(2n-3)$-мерные и $(2n-m-2)$-мерные плоскости, проходящие через эти прямые и m-мерные плоскости, называются *нуль-прямыми* и *m-мерными нуль-плоскостями*. Нуль-прямые пространства Sy^{2n-1} составляют абсолютный линейный комплекс этого пространства.

Проективные метрики

Пространство R^n, дополненное бесконечно удаленной гиперплоскостью с мнимой квадрикой, соответствует по принципу двойственности пространства P^n *коевклидову пространству* $(R^n)^*$, точки которого изображают гиперплоскости пространства R^n. При этом расстояния между точками равны углам между гиперплоскостями, а в случае параллельных гиперплоскостей — расстояниям между ними. Пространство $(R^n)^*$ представляет собой пространство P^n, в котором задан мнимый гиперконус второго порядка с точечной вершиной.

Пространство R^n, дополненное бесконечно удаленной гиперплоскостью, и пространство $(R^n)^*$ являются частными случаями *квазиэллиптического пространства* $S^{m,n}$, т. е. пространства P^n, в котором заданы мнимый гиперконус второго порядка с $(n-m-1)$-мерной вершиной и мнимая квадрика на этой вершине. Если X и Y — две точки этого пространства, представленные векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а уравнение мнимого гиперконуса имеет вид (3.16), то расстояние d между точками X и Y определяется формулой (3.17), где α и β — полярные гиперплоскости точек X и Y относительно мнимого гиперконуса. В том случае, когда прямая XY пересекается с вершиной мнимого гиперконуса, расстояние d обращается в нуль, но между точками X и Y определено второе расстояние d' в $(n-m)$-мерном евклидовом пространстве, определяемом этими точками и вершиной мнимого гиперконуса.

Мнимый гиперконус и мнимая квадрика на его вершине составляют *абсолют* пространства $S^{m,n}$. В случае пространства R^n абсолют состоит из дважды взятой бесконечно удаленной гиперплоскости этого пространства и мнимой квадрики на ней. В случае пространства $(R^n)^*$ абсолют состоит из мнимого гиперконуса с точечной вершиной и из дважды взятой точки, совпадающей с этой вершиной.

Будем называть пространство P^n с выделенной $(n-m-1)$-мерной плоскостью *квазиаффинным пространством* $E^{m,n}$. Коллинеации пространства $E^{m,n}$, переводящие в себя выделенную $(n-m-1)$-мерную плоскость, называются *квазиаффинными преобразованиями* этого пространства. В том случае, когда уравнения $(n-m-1)$-мерной плоскости имеют вид $x_a=0$, где $a=0, 1, \ldots, m$, квазиаффинные преобразования имеют вид

$$'x_a=\sum_b A_{ab}x_b, \quad 'x_u=\sum_b C_{ub}x_b+\sum_v B_{uv}x_v, \tag{3.21}$$

где $a, b=0, 1, \ldots, m$; $u, v=m+1, \ldots, n$.

Преобразования (3.21) образуют квазиредуктивную группу с умножением (2.71).

Если уравнения гиперконуса и квадрики абсолюта пространства $S^{m,n}$ имеют вид $\sum\limits_a (x_a)^2=0$ и $\sum\limits_u (x_u)^2=0$, то *движения* этого пространства, т. е. коллинеации, сохраняющие расстояния d и d', имеют вид (3.21), где матрицы (A_{ab}) и (B_{uv}) — ортогональные матрицы. В этом случае, если координаты x точек пространства $S^{m,n}$ нормированы условием $\sum\limits_a (x_a)^2=1$, то расстояние d между точками X и Y определяется соотношением $\cos(d/r)=\sum\limits_a x_a y_a$, а в случае, когда прямая XY пересекает

$(n-m-1)$-мерную плоскость $x_i = 0$, расстояние d' между точками X и Y равно $\sqrt{\sum_u (y_u - x_u)^2}$.

Квазиэллиптическое пространство $S^{1,3}$ было определено Вильгельмом Бляшке (1885—1962) в работе [Bla1] как пространство, метрика которого совпадает с инвариантной метрикой группы движений плоскости R^2.

Если мы заменим эллиптическое пространство на вершине абсолютного гиперконуса пространства $S^{m,n}$ квазиэллиптическим пространством, мы получим *биквазиэллиптическое пространство*. Если мы произведем эту операцию $r-1$ раз, мы получим *r-квазиэллиптическое пространство*.

Если в определении квазиэллиптического и r-квазиэллиптических пространств мы заменим некоторые из мнимых конусов и квадрик абсолютов этих пространств вещественными, мы получим *квазипсевдоэллиптические* и *r-квазипсевдоэллиптические пространства*.

Группы движений квазиэллиптического и квазипсевдоэллиптических пространств являются квазипростыми группами Ли. Группы движений r-квазиэллиптических и r-квазипсевдоэллиптических пространств являются r-квазипростыми группами Ли.

Метрики всех этих пространств называются проективными метриками. Полная классификация этих метрик была произведена Дунканом Маклареном Янгом Соммервиллем (1879—1934) в работе [Som].

Частными случаями биквазиэллиптических пространств являются *изотропное пространство* I^n и *галилеево пространство* Γ^n, получаемые из пространства R^n заменой геометрии пространства S^{n-1} на его бесконечно удаленной гиперплоскости геометрией пространств $(R^{n-1})^*$ и R^{n-1}. Название изотропного пространства объясняется тем, что геометрия этого пространства имеет место на «изотропных гиперплоскостях» пространства R^{n+1}, т. е. на таких его гиперплоскостях, которые не являются ни пространствами R^n, ни пространствами R^n_1. Геометрией пространства I^4 обладает пространство-время классической механики Галилея—Ньютона. В связи с этим пространство I^4 рассматривалось Картаном в работе [66]. Название галилеева пространства объясняется тем, что геометрию пространства-времени классической механики часто ошибочно считали геометрией пространства Γ^4.

n-квазиэллиптическое пространство, т. е. n-мерное пространство с проективной метрикой, абсолют которого представляет собой полный «флаг», состоящий из вложенных друг в друга плоскостей всех размерностей от гиперплоскости до точки, называется «флаговым пространством»

и обозначается F^n. Группой движений этого пространства является группа треугольных матриц, представляющая собой подгруппу Бореля группы коллинеаций пространства P^n.

Плоскость I^2 совпадает с плоскостями Γ^2 и F^2. Геометрия этой плоскости является естественной геометрией плоскости дуального переменного, подобно тому, как геометрии плоскостей R^2 и R_1^2 являются естественными геометриями плоскостей комплексного и двойного переменного.

Картан в работе [147a] рассмотрел дифференциальную геометрию плоскости I^2. Дифференциальная геометрия пространства I^3 изучалась Карлом Штрубеккером (1904—1991) в работе [Str].

Геометрии вещественных пространств с проективными метриками посвящена книга [Po3].

Комплексные пространства

В XIX веке наряду с вещественными пространствами рассматривались также комплексные пространства.

Заменяя в определении пространства L^n вещественные числа комплексными, мы определим *комплексное линейное пространство* $\mathbb{C}L^n$. Заменяя в определении пространств E^n и P^n пространство L^n пространством $\mathbb{C}L^n$, мы получим определения комплексных аффинного и проективного пространств $\mathbb{C}E^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

Прямые линии, m-мерные плоскости и гиперплоскости пространств $\mathbb{C}E^n$ и $\mathbb{C}P^n$ определяются теми же уравнениями (3.1)—(3.3) и (3.4)—(3.6), что и в пространствах E^n и P^n.

Аффинные преобразования пространства $\mathbb{C}E^n$ имеют вид (3.7) и

$$'x_i = \sum_j A_{ij}\bar{x}_j + a_i, \tag{3.22}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Коллинеации пространства $\mathbb{C}P^n$ имеют вид (3.8) и

$$'x_i = \sum_j A_{ij}\bar{x}_j, \tag{3.23}$$

где $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Корреляции пространства $\mathbb{C}P^n$ имеют вид (3.9) и

$$u_i = \sum_j \bar{x}_j A_{ij}. \tag{3.24}$$

Во всех этих уравнениях коэффициенты являются комплексными числами.

Преобразования (3.7) и (3.22) пространства $\mathbb{C}E^n$ образуют квазиредуктивную группу Ли, а преобразования (3.8) и (3.23) пространства $\mathbb{C}P^n$ образуют комплексную простую группу Ли класса A_n.

При преобразованиях (3.7) сохраняются простые отношения (3.10) троек точек, а при преобразованиях (3.22) эти отношения заменяются сопряженными комплексными числами. При преобразованиях (3.8) сохраняются двойные отношения (3.11) четверок точек, а при преобразованиях (3.23) эти отношения заменяются сопряженными комплексными числами. При преобразованиях (3.9) сохраняются двойные отношения (3.12) пар точек и пар гиперплоскостей, а при преобразованиях (3.24) эти отношения заменяются сопряженными комплексными числами.

Заменяя в определении пространства R^n вещественные координаты точек комплексными, мы определим комплексное квадратичное евклидово пространство $\mathbb{C}R^n$. Так как в пространстве $\mathbb{C}L^n$ квадратичную форму (3.13) всегда можно привести к сумме n квадратов, пространства $\mathbb{C}R^n_k$ совпадают с пространством $\mathbb{C}R^n$.

Если в пространстве $\mathbb{C}E^n$ определено эрмитово скалярное произведение векторов

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_i \sum_j \bar{y}_j a_{ij} x_i, \tag{3.25}$$

где $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, вследствие чего $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$, и если эрмитова форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, принимающая вещественные значения, положительно определенная, то пространство $\mathbb{C}E^n$ становится *комплексным эрмитовым евклидовым пространством* $\mathbb{C}\bar{R}^n$, в котором расстояние XY между точками с радиус-векторами x и y равно вещественному числу:

$$XY = \sqrt{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})(\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{x}})}.$$

Пространство $\mathbb{C}\bar{R}^n$ изометрично пространству R^{2n}.

В том случае, когда эрмитова форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ является знаконеопределенной и приводится к алгебраической сумме k отрицательных произведений $x_i\bar{x}_i$ и $n - k$ положительных произведений $x_i\bar{x}_i$, пространство $\mathbb{C}E^n$ становится *комплексным эрмитовым псевдоевклидовым пространством* $\mathbb{C}\bar{R}^n_k$ индекса k.

Расстояние между точками X и Y этого пространства определяется так же, как и для пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$, причем расстояния XY могут быть вещественными, чисто мнимыми или равными нулю. Пространство $\mathbb{C}\bar{R}^n_k$ изометрично пространству R^{2n}_{2k}.

Движениями пространств $\mathbb{C}R^n$, $\mathbb{C}\bar{R}^n$ и $\mathbb{C}\bar{R}^n_k$ называются аффинные преобразования (3.7) и (3.22) этих пространств, сохраняющие рассто-

яния между их точками. В случае движений пространства $\mathbb{C}R^n$, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) являются комплексными ортогональными матрицами. В случае движений пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) являются комплексными унитарными матрицами. В случае движений пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n_k$, когда $a_{ij} = e_i\delta_{ij}$, где $e_i = \pm 1$, матрицы (A_{ij}) являются комплексными псевдоунитарными матрицами индекса k.

Группы движений пространств $\mathbb{C}R^n$, $\mathbb{C}\bar{R}^n$ и $\mathbb{C}\bar{R}^n_k$ являются комплексными квазипростыми группами Ли.

Заменяя в определении пространств S^n вещественные координаты комплексными, мы получим *комплексное квадратичное эллиптическое пространство* $\mathbb{C}S^n$. Так как в пространстве $\mathbb{C}L^n$ квадратичную форму всегда можно привести к сумме n квадратов, пространства $\mathbb{C}S^n_k$ совпадают с пространством $\mathbb{C}S^n$, а пространства $\mathbb{C}H^n$ и $\mathbb{C}H^n_k$ не определяются.

Если в пространстве $\mathbb{C}P^n$ задана мнимая эрмитова гиперквадрика

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_i \sum_j x_j a_{ij} \bar{x}_i = 0, \tag{3.26}$$

где эрмитова форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, принимающая вещественные значения, положительно определенная, то пространство $\mathbb{C}P^n$ становится *комплексным эрмитовым эллиптическим пространством* $\mathbb{C}S^n$. Мнимая эрмитова гиперквадрика (3.26) называется *абсолютом* этого пространства.

Уравнение $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) = 0$, получаемое поляризацией уравнения (3.26), определяет полярную гиперплоскость точки X_0 относительно эрмитовой гиперквадрики. Полярное преобразование относительно этой гиперквадрики, переводящее всякую точку X_0 в ее полярную гиперплоскость, имеет вид (3.24), где $A_{ij} = a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных гиперплоскостей α и β относительно абсолюта этого пространства по формуле (3.17).

Число r называется *радиусом кривизны* пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$, а число $1/r^2$ называется *кривизной* этого пространства. Пространство $\mathbb{C}\bar{S}^n$ является римановым пространством V^{2n}. Прямые линии этого пространства изометричны сферам радиуса $r/2$ пространства R^3. Двумерные направления в пространстве $\mathbb{C}S^n$, соответствующие его прямым линиям, называются *голоморфными* двумерными направлениями, а риманова кривизна в этих направлениях равна $4/r^2$. Пространство V^{2n}, изометричное пространству $\mathbb{C}\bar{S}^n$, называется *пространством постоянной голоморфной кривизны*.

В случае, когда эрмитова гиперквадрика (3.26) является вещественной, она делит пространство $\mathbb{C}P^n$ на две области. Если гиперквадрика овальная, то та из этих областей, в которой $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) < 0$, называется *комплексным эрмитовым гиперболическим пространством* $\mathbb{C}\bar{H}^n$, а гиперквадрика (3.26) называется *абсолютом* этого пространства.

Расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{C}\bar{H}^n$ определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных гиперплоскостей α и β относительно абсолюта этого пространства по формуле (3.18).

Число qi называется *радиусом кривизны* пространства $\mathbb{C}\bar{H}^n$, а число $-1/q^2$ называется *кривизной* этого пространства. Пространство $\mathbb{C}\bar{H}^n$ является римановым пространством V^{2n}. Прямые линии этого пространства изометричны сферам радиуса $qi/2$ пространства R^3_1. Пространство V^{2n}, изометричное пространству $\mathbb{C}\bar{H}^n$, является пространством постоянной голоморфной кривизны $-4/q^2$.

Области, на которые пространство $\mathbb{C}P^n$ делится эрмитовой гиперквадрикой (3.26) индекса k, называются *комплексным эрмитовым псевдоэллиптическим пространством* $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$, если в этой области $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, и *комплексным эрмитовым псевдогиперболическим пространством* $\mathbb{C}\bar{H}^n_{k-1}$, если в этой области $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) < 0$. Эрмитова гиперквадрика (3.26) называется *абсолютом* пространств $\mathbb{C}S^n_k$ и $\mathbb{C}\bar{H}^n_{k-1}$.

Расстояния d между точками X и Y пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{C}\bar{H}^n_{k-1}$ определяются соответственно формулами (3.17) и (3.18). Числа r и qi называются *радиусами кривизны* этих пространств, а числа $1/r^2$ и $-1/q^2$ называются *кривизнами* этих пространств.

Пространство $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$ радиуса кривизны r изометрично псевдориманову пространству V^{2n}_{2k} постоянной голоморфной кривизны $4/r^2$, а пространство $\mathbb{C}\bar{H}^n_k$ радиуса кривизны qi изометрично псевдориманову пространству V^{2n}_{2k-2} постоянной голоморфной кривизны $-4/q^2$.

Движения пространств $\mathbb{C}S^n$, $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{C}\bar{H}^n$, $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{C}\bar{H}^n_k$ определяются как коллинеации этих пространств, переводящие в себя их абсолюты. В случае, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) движений пространств $\mathbb{C}S^n$ и $\mathbb{C}\bar{S}^n$ являются соответственно комплексными ортогональными и унитарными матрицами с определителями 1. В случае, когда $a_{ij} = e_i\delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) движений пространств $\mathbb{C}\bar{H}^n$, $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{C}\bar{H}^n_k$ являются комплексными псевдоунитарными матрицами с определителями 1 индексов соответственно 1, k и $k+1$.

Группы движений пространств $\mathbb{C}S^{2n}$ и $\mathbb{C}S^{2n-1}$ являются комплексными простыми группами Ли классов B_n и D_n. Группа движений пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ является компактной простой группой Ли класса A_n, группы

движений пространств $\mathbb{C}\bar{H}^n$, $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{C}\bar{H}^n_k$ являются некомпактными простыми группами Ли того же класса.

Александр Петрович Котельников (1865—1944) в работе [Кот2] и Э. Штуди в книге [Stu3] рассматривали сферы пространства $\mathbb{C}R^3$.

Пространство $\mathbb{C}\bar{S}^3$ было определено Гвидо Г. Фубини (1879—1943) в работе [Fu2] и Э. Штуди в работе [Stu4].

Пространство $\mathbb{C}P^3$, а также другие трехмерные комплексные пространства рассматривались Картаном в книге [134].

Заменяя в определении пространства Sy^{2n-1} вещественные координаты комплексными, мы получим *комплексное симплектическое пространство* $\mathbb{C}Sy^{2n-1}$. Симплектические преобразования этого пространства являются коллинеациями (3.8) и (3.23), переводящими в себя абсолютный линейный комплекс этого пространства. Группа симплектических преобразований пространства $\mathbb{C}Sy^{2n-1}$ является комплексной простой группой Ли класса C_n.

Пространства $\mathbb{C}P^n$, в которых заданы гиперквадрики (3.26), где $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$, называются комплексными эрмитовыми симплектическими пространствами $\mathbb{C}Sy^n$ и $\mathbb{C}\bar{S}y^n_k$. Эрмитова форма (3.26) при $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ принимает чисто мнимые значения, поэтому если умножить коэффициенты a_{ij} на i, мы получим уравнение эрмитовой гиперквадрики. Если эта гиперквадрика обладает плоскими образующими максимальной размерности, т. е. является гиперквадрикой индекса $n/2$ или $(n+1)/2$, то определенное нами пространство обозначается $\mathbb{C}\bar{S}y^n$. В случае, когда индекс гиперквадрики равен $n/2 - k$ или $(n+1)/2 - k$, это пространство обозначается $\mathbb{C}\bar{S}y^n_k$. Поэтому пространство $\mathbb{C}\bar{S}y^n_k$ при $k = n/2$ или $(n+1)/2$ совпадает с комплексным эрмитовым эллиптическим пространством, а пространства $\mathbb{C}\bar{S}y^n$ и $\mathbb{C}\bar{S}y^n_k$ при других значениях k совпадают с комплексными эрмитовыми псевдоэллиптическими пространствами. Точки абсолютных гиперквадрик этих пространств можно считать нуль-точками пространств $\mathbb{C}\bar{S}y^n$ и $\mathbb{C}\bar{S}y^n_k$, а прямолинейные и m-мерные плоские образующие можно считать нуль-прямыми и m-мерными нуль-плоскостями пространств $\mathbb{C}\bar{S}y^n$ и $\mathbb{C}\bar{S}y^n_k$.

В пространстве $\mathbb{C}P^n$ можно определить также квадратичные и эрмитовы квазиэллиптические, квазипсевдоэллиптические, r-квазиэллиптические и r-квазипсевдоэллиптические пространства. Движения этих пространств являются, соответственно, квазипростыми и r-квазипростыми группами Ли. Движения пространств $\mathbb{C}S^{m,n}$ имеют вид (3.21), где матрицы (A_{ab}) и (B_{uv}) — комплексные ортогональные матрицы, или являются произведениями этих движений на движение $'x_i = \bar{x}_i$, а движения пространств $\mathbb{C}\bar{S}^{m,n}$ имеют вид (3.21), где матрицы (A_{ab}) и (B_{uv}) — комплекс-

ные унитарные матрицы, или являются произведениями этих движений на движение $'x_i = \bar{x}_i$.

Двойные и дуальные пространства

Заменяя в определении линейных пространств L^n и $\mathbb{C}L^n$ вещественные и комплексные числа элементами алгебры $\mathbf{A}$ с делителями нуля, мы получим *модуль* над алгеброй $\mathbf{A}$. В случае, если в этом модуле имеются n линейно независимых элементов и всякий элемент этого модуля является линейной комбинацией этих n элементов, модуль называется *n-мерным свободным модулем* и обозначается $\mathbf{A}L^n$. Элементы модуля $\mathbf{A}L^n$, как и элементы пространств L^n и $\mathbb{C}L^n$, называются векторами.

В случае любой алгебры $\mathbf{A}$ с делителями нуля с помощью понятия модуля $\mathbf{A}L^n$ можно определить *аффинное пространство* $\mathbf{A}E^n$ и *проективное пространство* $\mathbf{A}P^n$. В этом случае в пространстве $\mathbf{A}E^n$ имеются *особенные векторы*, обладающие тем свойством, что произведение такого вектора на некоторый делитель нуля алгебры $\mathbf{A}$ является нулевым вектором.

В случае, когда XY — особенный вектор, точки X и Y называются *смежными точками*. Через смежные точки проходит более одной прямой. Две прямые, проходящие через две смежные точки, называются *смежными прямыми*. Смежные точки и прямые плоскостей $\mathbf{A}E^2$ и $\mathbf{A}P^2$ были определены Вильгельмом Клингенбергом [Kli].

На плоскостях $\mathbf{A}E^2$ кроме пересекающихся, параллельных и смежных прямых имеются *расходящиеся прямые* — такие прямые, что переносом одной из них можно превратить их в смежные. На плоскостях $\mathbf{A}P^2$ имеются только пересекающиеся и смежные прямые.

Рассмотрим более подробно пространства $\mathbb{C}'E^n$ и $\mathbb{C}'P^n$ над алгеброй $\mathbb{C}'$ двойных чисел и пространства $\mathbb{C}^0E^n$ и $\mathbb{C}^0P^n$ над алгеброй $\mathbb{C}^0$ дуальных чисел.

Пространства $\mathbb{C}'E^n$ и $\mathbb{C}'P^n$ допускают интерпретации на парах вещественных пространств E^n и P^n. Если точка X пространства $\mathbb{C}'E^n$ или $\mathbb{C}'P^n$ имеет аффинные или проективные координаты $x_i = x_{i+}e_+ + x_{i-}e_-$, где $e_+^2 = e_-$, $e_-^2 = e_-$, $e_+e_- = 0$, то эта точка изображается точками X_+ и X_- вещественных пространств с координатами x_{i+} и x_{i-}, прямая L изображается прямыми L_+ и L_- этих пространств и т.д. В частности, если прямые K и L плоскости $\mathbb{C}'E^2$ смежные, то прямые K_+ и L_+ совпадают, а прямые K_- и L_- пересекаются, или наоборот; а если прямые K и L расходятся, то прямые K_+ и L_+ параллельны, прямые K_- и L_- пересекаются, или наоборот.

В аффинных пространствах $\mathbb{C}'E^n$ и $\mathbb{C}^0E^n$ можно определить метрики квадратичных и эрмитовых евклидовых и псевдоевклидовых пространств $\mathbb{C}'R^n$, $\mathbb{C}'R^n_k$, $\mathbb{C}'\bar{R}^n$, $\mathbb{C}'\bar{R}^n_k$ и $\mathbb{C}^0R^n$, $\mathbb{C}^0R^n_k$, $\mathbb{C}^0\bar{R}^n$, $\mathbb{C}^0\bar{R}^n_k$. Пространства $\mathbb{C}'R^n_k$ совпадают с пространством $\mathbb{C}'R^n$.

В проективных пространствах $\mathbb{C}'P^n$ и $\mathbb{C}^0P^n$ можно определить метрики квадратичных и эрмитовых эллиптических и псевдоэллиптических пространств $\mathbb{C}'S^n$, $\mathbb{C}'S^n_k$, $\mathbb{C}'\bar{S}^n$, $\mathbb{C}'\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{C}^0S^n$, $\mathbb{C}^0S^n_k$, $\mathbb{C}^0\bar{S}^n$, $\mathbb{C}^0\bar{S}^n_k$. Пространства $\mathbb{C}'\bar{S}^n_k$ совпадают с пространством $\mathbb{C}'\bar{S}^n$.

Группа движений пространства $\mathbb{C}'\bar{S}^n$ является некомпактной простой группой Ли класса A_n. Группы движений пространств $\mathbb{C}'S^n$ и $\mathbb{C}'S^n_k$ являются полупростыми группами Ли. Группы движений пространств $\mathbb{C}'R^n$, $\mathbb{C}'\bar{R}^n$, $\mathbb{C}'\bar{R}^n_k$, $\mathbb{C}^0S^n$, $\mathbb{C}^0S^n_k$, $\mathbb{C}^0\bar{S}^n$, $\mathbb{C}^0\bar{S}^n_k$ являются квазипростыми группами Ли. Группы движений пространств $\mathbb{C}^0R^n$, $\mathbb{C}^0R^n_k$, $\mathbb{C}^0\bar{R}^n$, $\mathbb{C}^0\bar{R}^n_k$ являются биквазипростыми группами Ли.

Б. А. Розенфельд в работе [Po1] доказал, что пространство $\mathbb{C}'\bar{S}^n$ допускает интерпретацию в пространстве P^n в виде многообразия пар (точка, гиперплоскость) пространства P^n, и, если определить в этом многообразии расстояние d между двумя парами, состоящими из точки X и гиперплоскости α и из точки Y и гиперплоскости β, по формуле $\cos^2 d = W(X, Y; \alpha, \beta)$, то это многообразие будет изометрично пространству $\mathbb{C}'\bar{S}^n$ кривизны 1. Группа движений пространства $\mathbb{C}'\bar{S}^n$ изоморфна группе проективных преобразований пространства P^n.

А. П. Котельников в работах [Кот1] и [Кот2] и Э. Штуди в книге [Stu3] рассматривали сферы в пространствах $\mathbb{C}^0R^3$ и $\mathbb{C}'R^3$.

Во многом подобны пространствам над алгеброй $\mathbb{C}'$ двойных чисел пространства над алгеброй $\mathbb{C}^2$ *бикомплексных чисел*. Эта алгебра, являющаяся тензорным произведением двух полей $\mathbb{C}$, изоморфна тензорному произведению $\mathbb{C}\mathbb{C}'$ и, так как $\mathbb{C}' = R + R$, прямой сумме $\mathbb{C} + \mathbb{C}$.

В проективном пространстве $\mathbb{C}^2P^n$ можно определить метрику *бикомплексного эрмитова эллиптического пространства* $\mathbb{C}^2\bar{S}^n$ с абсолютом

$$(x, x) = \sum_i \sum_j \bar{\bar{x}}_j a_{ij} x_i, \tag{3.27}$$

где $a_{ij} = \bar{\bar{a}}_{ji}$, причем $x \to \bar{x}$ — переход к сопряженному элементу в одном из тензорных сомножителей алгебры $\mathbb{C}^2$, $x \to \tilde{x}$ — переход к сопряженному элементу в другом из этих сомножителей. Если единицы алгебры $\mathbb{C}^2$ — элементы 1, i, l и il и если расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{C}^2\bar{\bar{S}}^n$ определено по формуле (3.17), то расстояние d является бикомплексным числом вида $a + bil$, которое можно рассматривать как двойное число.

Назим Танриверди оглы Аббасов [Аб1] доказал, что пространство $\mathbb{C}^2\tilde{\bar{S}}^n$ допускает интерпретацию на паре пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n$, причем если точки X и Y пространства $\mathbb{C}^2\tilde{\bar{S}}^n$ изображаются точками X_+, Y_+ и X_-, Y_- пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n$ с расстояниями d_+ и d_-, то расстояние d между точками X и Y равно $d_+(1+il)/2 + d_-(1-il)/2$. Группа движений пространства $\mathbb{C}^2\tilde{\bar{S}}^n$ изоморфна прямому произведению двух групп движений пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$.

Кватернионные пространства

В работах Картана наряду с вещественными и комплексными пространствами рассматриваются кватернионные пространства и преобразования этих пространств.

Если в определении линейных пространств L^n и $\mathbb{C}L^n$ заменить поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ телом $\mathbb{H}$ кватернионов, мы получим *кватернионное линейное пространство* $\mathbb{H}L^n$.

Так как тело $\mathbb{H}$ некоммутативно, кватернионные множители ставятся всегда справа от векторов пространства $\mathbb{H}L^n$. С помощью пространства $\mathbb{H}L^n$ определяются *кватернионные аффинное пространство* $\mathbb{H}E^n$ и *проективное пространство* $\mathbb{H}P^n$. Прямые линии, m-мерные плоскости и гиперплоскости пространств $\mathbb{H}E^n$ и $\mathbb{H}P^n$ определяются, как и в аффинных и проективных пространствах $\mathbf{A}E^n$ и $\mathbf{A}P^n$ над любой алгеброй $\mathbf{A}$, соответственно уравнениями (3.1)—(3.6).

Аффинные преобразования пространства $\mathbf{A}E^n$ над любой алгеброй $\mathbf{A}$ имеют вид

$$'x_i = \sum_j A_{ij} f(x_j + a_j) \tag{3.28}$$

при $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где $'x = f(x)$ — автоморфизм алгебры $\mathbf{A}$.

Коллинеации пространства $\mathbf{A}P^n$ над любой алгеброй $\mathbf{A}$ имеют вид

$$'x_i = \sum_j A_{ij} f(x_j) \tag{3.29}$$

при $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

Корреляции пространства $\mathbf{A}P^n$ имеют вид

$$u_i = \sum_j \varphi(x_j) A_{ij}, \tag{3.30}$$

где $'x = \varphi(x)$ — антиавтоморфизм алгебры $\mathbf{A}$, т. е. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$.

В случае поля $\mathbb{R}$ автоморфизмы и антиавтоморфизмы являются тождественными преобразованиями $'x = x$ и формулы (3.28), (3.30) принимают вид (3.7), (3.9).

В случае поля $\mathbb{C}$ непрерывные автоморфизмы и антиавтоморфизмы являются преобразованиями $'x = x$ и $'x = \bar{x}$, и формулы (3.28) и (3.30) принимают вид (3.7), (3.9) и (3.22), (3.24).

В случае тела $\mathbb{H}$ все автоморфизмы являются внутренними, т. е. имеют вид $'x = pxp^{-1}$, а все антиавтоморфизмы имеют вид $'x = p\bar{x}p^{-1}$. Поэтому в пространстве $\mathbb{H}E^n$ аффинные преобразования (3.28) имеют вид

$$'x_i = \sum_j B_{ij}x_jp^{-1} + a_i \tag{3.31}$$

при $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

В пространстве $\mathbb{H}P^n$ коллинеации (3.29) имеют вид

$$'x_i = \sum_j B_{ij}x_jp^{-1}, \tag{3.32}$$

где $i, j = 0, 1, \ldots, n$, а корреляции (3.30) имеют вид

$$u_i = \sum_j p\bar{x}_jB_{ij}. \tag{3.33}$$

Группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{H}E^n$ является квазиредуктивной группой Ли. Группа коллинеаций пространства $\mathbb{H}P^n$ является некомпактной простой группой Ли класса A_{2n+1}.

Над некоммутативными алгебрами **A** нельзя определить квадратичное пространство, в случае же, когда алгебра **A** обладает инволюцией, т. е. инволютивным антиавтоморфизмом $'x = \bar{x}$, над этой алгеброй можно определить эрмитовы пространства. Так как переход к сопряженному кватерниону является инволюцией, над телом $\mathbb{H}$ можно определить эрмитовы пространства.

Если в пространстве $\mathbb{H}E^n$ определено эрмитово скалярное произведение векторов (3.25), где $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, вследствие чего $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$, и если эрмитова форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, принимающая вещественные значения, положительно определена, то пространство $\mathbb{H}E^n$ становится *кватернионным эрмитовым евклидовым пространством* $\mathbb{H}R^n$, в котором расстояние XY между точками с радиус-векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равно вещественному числу (3.14). Пространство $\mathbb{H}\bar{R}^n$ изометрично пространству R^{4n}.

В том случае, когда эрмитова форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ является знаконеопределенной и приводится к алгебраической сумме k отрицательных произведений $x_i\bar{x}_i$ и $n - k$ положительных произведений $x_i\bar{x}_i$, простран-

ство $\mathbb{H}E^n$ становится *кватернионным эрмитовым псевдоевклидовым пространством* $\mathbb{H}\bar{R}^n_k$ *индекса* k. Расстояние между точками X и Y этого пространства равно (3.14), причем расстояние XY может быть вещественным, чисто мнимым или равным нулю.

Движениями пространств $\mathbb{H}\bar{R}^n$ и $\mathbb{H}\bar{R}^n_k$ называются аффинные преобразования (3.31) этих пространств, сохраняющие расстояния между их точками. В случае движений пространства $\mathbb{H}\bar{R}^n$, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (A_{ij}) являются кватернионными унитарными матрицами. В случае движений пространства $\mathbb{H}\bar{R}^n_k$, когда $a_{ij} = e_i\delta_{ij}$, где $e_i = \pm 1$, матрицы (A_{ij}) являются кватернионными псевдоунитарными матрицами индекса k.

Группы движений пространств $\mathbb{H}\bar{R}^n$ и $\mathbb{H}\bar{R}^n_k$ являются кватернионными квазипростыми группами Ли.

Если в пространстве $\mathbb{H}P^n$ задана мнимая эрмитова гиперквадрика (3.26), где эрмитова форма $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, принимающая вещественные значения, положительно определена, то пространство $\mathbb{H}P^n$ становится *кватернионным эрмитовым эллиптическим пространством* $\mathbb{H}\bar{S}^n$. Мнимая эрмитова гиперквадрика называется *абсолютом* этого пространства.

Уравнение $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) = 0$, получаемое поляризацией уравнения (3.26), определяет полярную гиперплоскость точки X_0 относительно эрмитовой гиперквадрики. Полярное преобразование относительно этой гиперквадрики, переводящее всякую точку X_0 в ее полярную гиперплоскость, имеет вид (3.33), где $B_{ij} = a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{H}E^n$ определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных гиперплоскостей α и β относительно абсолюта этого пространства по формуле (3.17).

Число r называется *радиусом кривизны* пространства $\mathbb{H}\bar{S}^n$, а число $1/r^2$ называется *кривизной* этого пространства. Пространство $\mathbb{H}\bar{H}^n$ является римановым пространством V^{4n}. Прямые линии этого пространства изометричны гиперсферам радиуса $r/2$ пространства R^5. Риманова кривизна в двумерных направлениях этих прямых линий равна $4/r^2$, поэтому пространство V^{4n}, изометричное пространству $\mathbb{H}\bar{S}^n$, является пространством постоянной голоморфной кривизны.

В случае, когда эрмитова гиперквадрика (3.26) является вещественной, она делит пространство $\mathbb{H}P^n$ на две области. Если гиперквадрика овальная, то та из этих областей, в которой $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) < 0$, называется *кватернионным эрмитовым гиперболическим пространством* $\mathbb{H}\bar{H}^n$, а гиперквадрика (3.26) называется *абсолютом* этого пространства.

Расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{H}\bar{H}^n$ определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных гиперплоскостей α и α относительно абсолюта этого пространства по формуле (3.18). Число qi называется радиусом кривизны пространства $\mathbb{H}\bar{H}^n$, а число $-1/q^2$ называется кривизной этого пространства. Пространство $\mathbb{H}\bar{H}^n$ является римановым пространством V^{4n}. Прямые линии этого пространства изометричны гиперсферам радиуса $qi/2$ пространства R^5_1. Пространство V^{4n}, изометричное пространству $\mathbb{H}\bar{H}^n$, называется пространством постоянной голоморфной кривизны $-4/q^2$.

Области, на которые пространство $\mathbb{H}P^n$ делится эрмитовой гиперквадрикой (3.26) индекса k, называются *кватернионным эрмитовым псевдоэллиптическим пространством* $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$, если в этой области $(x, x) > 0$, и *кватернионным эрмитовым псевдогиперболическим пространством* $\mathbb{H}\bar{H}^n_{k-1}$, если в этой области $(x, x) < 0$. Эрмитова гиперквадрика (3.26) называется *абсолютом* пространств $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n_{k-1}$.

Расстояния d между точками X и Y пространств $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n_{k-1}$ определяются соответственно формулами (3.17) и (3.18). Числа r и qi называются *радиусами кривизны* этих пространств, а числа $1/r^2$ и $-1/q^2$ называются *кривизнами* этих пространств.

Пространство $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ радиуса кривизны r изометрично псевдориманову пространству V^{4n}_{4k} постоянной голоморфной кривизны $4/r^2$, а пространство $\mathbb{H}\bar{H}^n_k$ радиуса кривизны qi изометрично псевдориманову пространству V^{4n}_{4k-4} постоянной голоморфной кривизны $-4/q^2$.

Движения пространств $\mathbb{H}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{H}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n_k$ определяются как коллинеации этих пространств, переводящие в себя их абсолюты. В случае, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, матрицы (B_{ij}) движений пространства $\mathbb{H}\bar{S}^n$ являются кватернионными унитарными матрицами. В случае, когда $a_{ij} = e_i\delta_{ij}$, матрицы (B_{ij}) движений пространств $\mathbb{H}\bar{H}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n_k$ являются кватернионными псевдоунитарными матрицами соответственно индексов 1, k и $k+1$.

Группа движений пространства $\mathbb{H}\bar{S}^n$ является компактной простой группой Ли класса C_{n+1}, группы движений пространств $\mathbb{H}\bar{H}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n_k$ являются некомпактными простыми группами Ли того же класса.

Картан определил пространство $\mathbb{H}P^n$ в работе [46], а пространство $\mathbb{H}\bar{S}^n$ в работе [107].

Пространство $\mathbb{H}P^n$, в котором задано уравнение (3.26), где $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$, называется *кватернионным эрмитовым симплектическим пространством* $\mathbb{H}\bar{S}y^n$. Точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.26), называются *нуль-точками* пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^n$. Корреляция (3.33), где $p = 1$ и $B_{ij} = a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$, называется *абсолютной*

нуль-системой пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^n$. Группа симплектических преобразований пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^n$ является некомпактной простой группой Ли класса D_{n+1}. Геометрия пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^n$ изучалась Л. В. Румянцевой [Ру1].

В пространстве $\mathbb{H}P^n$ можно определить также эрмитовы квазиэллиптические, квазипсевдоэллиптические, r-квазиэллиптические и r-квазипсевдоэллиптические пространства. Движения этих пространств являются соответственно квазипростыми и r-квазипростыми группами Ли.

Заменяя в определении пространств $\mathbb{H}L^n$, $\mathbb{H}E^n$ и $\mathbb{H}P^n$ тело $\mathbb{H}$ алгебрами $\mathbb{H}'$ и $\mathbb{H}^0$, мы получим антикватернионные модуль $\mathbb{H}'L^n$, пространства $\mathbb{H}'E^n$, $\mathbb{H}'P^n$ и полукватернионные модуль $\mathbb{H}^0L^n$, пространства $\mathbb{H}^0E^n$ и $\mathbb{H}^0P^n$.

В аффинных пространствах $\mathbb{H}'E^n$ и $\mathbb{H}^0E^n$ можно определить метрику эрмитовых евклидовых и псевдоевклидовых пространств $\mathbb{H}'\bar{R}^n$, $\mathbb{H}'\bar{R}^n_k$ и $\mathbb{H}^0\bar{R}^n$, $\mathbb{H}^0\bar{R}^n_k$. Пространства $\mathbb{H}'R^n_k$ совпадают с пространством $\mathbb{H}'\bar{R}^n$.

В проективных пространствах $\mathbb{H}'P^n$ и $\mathbb{H}^0P^n$ можно определить метрику пространств $\mathbb{H}'\bar{S}^n$, $\mathbb{H}'\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}^0\bar{S}^n$, $\mathbb{H}^0\bar{S}^n_k$. Пространства $\mathbb{H}'\bar{S}^n_k$ совпадают с пространством $\mathbb{H}'\bar{S}^n$.

Группы движений пространств $\mathbb{H}'\bar{S}^n$ и $\mathbb{H}'\bar{S}^n_k$ являются простыми группами Ли класса C_{n+1}. Группы движений пространств $\mathbb{H}'\bar{R}^n$, $\mathbb{H}'\bar{R}^n_k$, $\mathbb{H}^0\bar{R}^n$, $\mathbb{H}^0\bar{R}^n_k$ являются квазипростыми группами Ли. Группы движений пространств $\mathbb{H}^0\bar{R}^n$ и $\mathbb{H}^0\bar{R}^n$ являются бикквазипростыми группами Ли.

Б. А. Розенфельд в книге [Ро2] доказал, что пространство $\mathbb{H}'P^n$ допускает интерпретацию в виде многообразия прямых пространства P^{2n+1}, причем прямые пространства $\mathbb{H}'P^n$ изображаются трехмерными плоскостями пространства P^{2n+1}, а смежные точки пространства $\mathbb{H}'P^n$ изображаются пересекающимися прямыми пространства P^{2n+1}. В случае, когда в пространстве $\mathbb{H}'P^n$ задана метрика пространства $\mathbb{H}'\bar{S}^n$, в пространстве P^{2n+1} определяется геометрия пространства Sy^{2n+1}. При этом расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{H}'\bar{S}^n$ кривизны 1 связано с симплектическим инвариантом $W(s, t; \sigma, \tau)$ двух прямых s и t пространства Sy^{2n+1}, изображающих точки X и Y, соотношением $\cos^2 d = W(s, t; \sigma, \tau)$. Группа движений пространства $\mathbb{H}'\bar{S}^n$ изоморфна группе симплектических преобразований пространства Sy^{2n+1}.

Во многом подобны пространствам над алгеброй $\mathbb{H}'$ пространства над тензорным произведением $\mathbb{CH}$, изоморфным алгебре $\mathbb{C}_2$ комплексных матриц второго порядка.

Пространство $\mathbb{CH}P^n$ допускает интерпретацию в виде многообразия прямых пространства $\mathbb{C}P^{2n+1}$.

В пространстве $\mathbb{CH}P^n$ можно определить метрику эрмитова эллиптического пространства $\mathbb{CH}\widetilde{S}^n$ с абсолютом (3.27), где $a_{ij} = \bar{\bar{a}}_{ji}$. Если единицы алгебры $\mathbb{CH}$ — элементы $1, i, j, k, l, il, jl$ и kl и если расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{CH}S^n$ определено по формуле (3.17), то оно является бикомплексным числом вида $a + bil$.

Н. Т. Аббасов [Аб2] доказал, что пространство $\mathbb{CH}\widetilde{S}^n$ допускает интерпретацию в виде многообразия прямых пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{2n+1}$, причем если точки X и Y пространства $\mathbb{CH}\widetilde{S}^n$ изображаются прямыми пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{2n+1}$ со стационарными расстояниями d_0 и d_1, то расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{CH}\widetilde{S}^n$ равно $d_0 + d_1 il$. Группа движений пространства $\mathbb{CH}\widetilde{S}^n$ изоморфна группе движений пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{2n+1}$.

Аналогично определяются пространства над тензорным произведением $\mathbb{H}^2$, изоморфным алгебре $\mathbb{R}_4$ вещественных матриц четвертого порядка.

Пространство $\mathbb{H}^2P^n$ допускает интерпретацию в виде многообразия трехмерных плоскостей пространства P^{4n+1}.

В пространстве $\mathbb{H}^2P^n$ можно ввести метрику эрмитова эллиптического пространства с абсолютом (3.27), где $a_{ij} = \bar{\bar{a}}_{ji}$. Если единицы тензорных сомножителей алгебры — элементы $1, i, j, k$ и $1, I, J, K$ и если расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{H}^2\widetilde{S}^n$ определено по формуле (3.17), то оно имеет вид $a_0 + a_1 iI + a_2 jJ + a_3 kK$.

Л. В. Румянцева [Ру2] доказала, что пространство $\mathbb{H}^2\widetilde{S}^n$ допускает интерпретацию в виде многообразия трехмерных плоскостей пространства S^{4n+3}, причем если точки X и Y пространства $\mathbb{H}^2\widetilde{S}^n$ изображаются трехмерными плоскостями со стационарными расстояниями d_0, d_1, d_2, d_3, то расстояние d между точками X и Y пространства $\mathbb{H}^2\widetilde{S}^n$ равно $d_0 + d_1 iI + d_2 jJ + d_3 kK$. Группа движений пространства $\mathbb{H}^2\widetilde{S}^n$ изоморфна группе движений пространства S^{4n+3}.

Октонионные плоскости

Картан отмечал, что компактная особая простая группа Ли класса G_2 является группой автоморфизмов тела $\mathbb{O}$ октонионов. Связь тела $\mathbb{O}$ с другими особыми простыми группами Ли была установлена только в 50-х годах XX века. В 1950 г. А. Борель [Bor] построил топологическими методами *октонионные проективную плоскость* $\mathbb{O}P^2$ и *эрмитову эллиптическую плоскость* $\mathbb{O}\bar{S}^2$, а в 1951 г. Ганс Фрейденталь (1905—1990) определил те же плоскости с помощью алгебраических методов. Борель и Фрейденталь доказали, что группа движений плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ является компактной особой простой группой Ли класса F_4, а группа коллинеаций плоскости $\mathbb{O}P^2$ является некомпактной особой простой группой Ли класса E_6.

Давид Гильберт (1862—1943) в «Основаниях геометрии» [Гил] показал, что над неассоциативной числовой системой может быть построена только проективная плоскость и нельзя построить проективное пространство размерности $n > 2$. Это объясняется тем, что на проективной плоскости $\mathbf{A}P^2$ над неассоциативной алгеброй $\mathbf{A}$ не выполняется теорема Дезарга, а в проективных пространствах размерности $n > 2$ эта теорема является следствием аксиом сочетания проективной геометрии.

Так как тело неассоциативно, то проективные координаты x_i точки нельзя представить в виде $(x_i p)q = x_i(pq)$. Поэтому Фрейденталь задавал точки плоскости $\mathbb{O}P^2$ октонионными матрицами x_{ij} третьего порядка, удовлетворяющими условиям

$$x_{ij} = \bar{x}_{ji}, \tag{3.34}$$

$$x_{ij}x_{jk} = x_{jj}x_{ik}. \tag{3.35}$$

Из условия (3.34) следует, что элементы x_{ii} этих матриц — вещественные числа. Поэтому условие (3.35) показывает, что элементы x_{ij}, x_{jk} и x_{ik} принадлежат к одному ассоциативному подтелу тела $\mathbb{O}$.

Отсюда следует, что элементы матриц (x_{ij}) можно выразить через три октониона x_0, x_1 и x_2, принадлежащие к одному ассоциативному подтелу, по формуле $x_{ij} = x_i\bar{x}_j$.

Автоморфизм $'x = f(x)$ переводит октонионы x_0, x_1, x_2 в октонионы $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, также принадлежащие к одному ассоциативному подтелу. Преобразование (3.29) переводит октонионы x_0, x_1, x_2 в три октониона, вообще говоря, не принадлежащие к одному ассоциативному подтелу.

Со всяким ассоциативным подтелом альтернативного тела $\mathbb{O}$, изоморфным телу $\mathbb{H}$, связан инволютивный автоморфизм $'x = \check{x}$ тела $\mathbb{O}$, который можно назвать «отражением от ассоциативного подтела». Если единицы 1, i, j, k алгебры $\mathbb{O}$ расположены в подтеле, то преобразование $'x = \check{x}$ состоит в умножении единиц l, p, q, r на -1.

Со всяким ассоциативным подтелом тела $\mathbb{O}$, изоморфным телу $\mathbb{H}$, связано также проектирование на ассоциативное подтело

$$'x = \check{\bar{x}} = \frac{1}{2}(x + \check{x}). \tag{3.36}$$

Поэтому, если мы применим к трем октонионам (3.29) ($i = 0, 1, 2$) проектирование на ассоциативное подтело, содержащее октонионы $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, то мы получим три октониона этого подтела

$$'x_i = \sum_j \check{\bar{a}}_{ij} f(x_j). \tag{3.37}$$

Именно вид (3.37) имеет коллинеация плоскости $\mathbb{O}P^2$, образующая некомпактную особую простую группу Ли класса E_6. Алгебра Ли этой группы состоит из октонионных матриц третьего порядка с нулевым следом и алгебры Ли группы G_2. Размерность этой группы равна $8 \cdot 8 + 14 = 78$.

Эрмитова эллиптическая плоскость $\mathbb{O}\bar{S}^2$ представляет собой плоскость $\mathbb{O}P^2$, в которой задан абсолют, являющийся эрмитовым коническим сечением с положительно определенной эрмитовой формой $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Расстояние d между точками X и Y плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных прямых α и β относительно абсолюта этой плоскости по формуле (3.17).

Число r называется *радиусом кривизны* плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$, а число $1/r^2$ называется *кривизной* этой плоскости. Плоскость $\mathbb{O}\bar{S}^2$ является римановым пространством V^{16}. Прямые линии этой плоскости изометричны гиперсферам радиуса $r/2$ пространства R^9. Риманова кривизна в двумерных направлениях этих прямых линий равна $4/r^2$, поэтому пространство V^{16}, изометричное плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$, является пространством постоянной голоморфной кривизны. Движения плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ являются коллинеациями (3.37), переводящими в себя абсолют этой плоскости. Алгебра Ли группы этих движений состоит из косоэрмитовых октонионных матриц третьего порядка с нулевым следом и из алгебры Ли группы G_2. Размерность этой группы равна $3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 14 = 52$.

Б. А. Розенфельд в 1954 г. в работе [Ро3] доказал, что многообразие пар (точка, прямая) плоскости $\mathbb{O}P^2$, в котором определено расстояние d между двумя парами, состоящими из точек X и Y и прямых α и β, по формуле $\cos^2 d = W(X, Y; \alpha, \beta)$, изометрично *эрмитовой эллиптической плоскости* $\mathbb{C}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$ кривизны 1. Плоскость $\mathbb{C}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$ представляет собой проективную плоскость $\mathbb{C}'\mathbb{O}P^2$, в которой задан абсолют, являющийся эрмитовым коническим сечением (3.27). Группа движений этой плоскости изоморфна группе коллинеаций плоскости $\mathbb{O}P^2$.

Заменяя в определении этой плоскости проективную плоскость $\mathbb{C}'\mathbb{O}P^2$ плоскостью $\mathbb{C}\mathbb{O}P^2$ и считая абсолют мнимым, мы получим *биоктонионную эрмитову эллиптическую плоскость* $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{S}^2$. Расстояние d между точками X и Y определяется по формуле (3.17). Это расстояние имеет вид $d = d_0 + d_1 il$. Группа движений этой плоскости — компактная особая простая группа Ли класса E_6. Алгебра Ли этой группы состоит из биоктонионных косоэрмитовых матриц третьего порядка с нулевым следом и алгебры Ли группы G_2. Размерность этой группы равна $3 \cdot 16 + 2 \cdot 8 + 14 = 78$.

В 1956 г. Б. А. Розенфельд [Ро4] предложил аналогичные интерпретации компактных особых простых групп Ли классов E_7 и E_8 в виде групп движений плоскостей $\mathbb{H}\mathbb{O}\tilde{S}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$.

Абсолютами плоскостей $\mathbb{HO}\tilde{S}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$ являются мнимые эрмитовы конические сечения (3.27). Расстояния d между точками X и Y этих плоскостей определяются по формуле (3.17). Это расстояние на плоскости $\mathbb{HO}\tilde{S}^2$ имеет вид $d = d_0 + d_1 iI + d_2 jJ + d_3 kK$, а на плоскости $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$ — вид $d = d_0 + d_1 iI + d_2 jJ + d_3 kK + d_4 lL + d_5 pP + d_6 qQ + d_7 rR$.

Алгебра Ли группы движений первой из этих плоскостей состоит из косоэрмитовых матриц третьего порядка с элементами из алгебры $\mathbb{HO}$ с нулевым следом и из алгебр Ли групп A_1 и G_2. Алгебра Ли группы движений второй из этих плоскостей состоит из косоэрмитовых матриц третьего порядка с элементами из алгебры $\mathbb{O}^2$ с нулевым следом и из двух алгебр Ли группы G_2. Размерности этих групп равны $3 \cdot 32 + 2 \cdot 10 + 3 + 14 = 133$ и $3 \cdot 64 + 2 \cdot 14 + 2 \cdot 14 = 248$.

Заменяя в определении плоскостей $\mathbb{O}\bar{S}^2$, $\mathbb{CO}\tilde{S}^2$, $\mathbb{HO}\tilde{S}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$ мнимые абсолюты вещественными, мы получим *эрмитовы гиперболические плоскости* $\mathbb{O}\bar{\mathbb{H}}^2$, $\mathbb{CO}\tilde{H}^2$, $\mathbb{HO}\tilde{H}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{H}^2$, группы движений которых являются некомпактными особыми простыми группами Ли FII, EII, EVI и EVIII классов F_4, E_6, E_7 и E_8. Плоскость $\mathbb{O}\bar{H}^2$ изучалась Титсом [Ti1].

Расстояние d между точками X и Y плоскости $\mathbb{O}\bar{H}^2$ определяется двойным отношением $W(X, Y; \alpha, \beta)$ точек X и Y и их полярных прямых α и β относительно абсолюта этой плоскости по формуле (3.18). Число qi называется *радиусом кривизны* плоскости $\mathbb{O}\bar{H}^2$, а число $-1/q^2$ называется *кривизной* этой плоскости. Плоскость $\mathbb{O}\bar{H}^2$ является римановым пространством V^{16}. Прямые линии этой плоскости изометричны гиперсферам радиуса $qi/2$ пространства R^9_1. Пространство V^{16}, изометричное плоскости $\mathbb{O}\bar{H}^2$, является пространством постоянной голоморфной кривизны $-4/q^2$.

Заменяя в определении плоскостей $\mathbb{O}\bar{S}^2$, $\mathbb{CO}\tilde{S}^2$, $\mathbb{HO}\tilde{S}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$ поле $\mathbb{C}$ и тела $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ алгебрами $\mathbb{C}'$, $\mathbb{H}'$ и $\mathbb{O}'$, мы получим *эрмитовы эллиптические плоскости* $\mathbb{O}'\bar{S}^2$, $\mathbb{C}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$, $\mathbb{C}'\mathbb{O}'\tilde{S}^2$, $\mathbb{H}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$, $\mathbb{HO}'\tilde{S}^2$, $\mathbb{H}'\mathbb{O}'\tilde{S}^2$, $\mathbb{O}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$ и $\mathbb{O}'^2\tilde{S}^2$, группы движений которых являются некомпактными особыми простыми группами Ли FI, EIV, EII, EI, EVII, EVI, EV, EIX и EVIII тех же классов. Группы движений плоскостей $\mathbb{O}'\bar{S}^2$, $\mathbb{C}'\mathbb{O}'\tilde{S}^2$ и $\mathbb{O}'^2\tilde{S}^2$ являются расщепленными простыми группами Ли.

Геометрические интерпретации всех особых простых групп Ли изложены в книге Б. А. Розенфельда [Ro].

Г. Фрейденталь в статье [Frd] доказал, что одна из некомпактных простых групп Ли класса E_7 является группой преобразований многообразия плоскостей $\mathbb{O}P^2$, аналогичного многообразиям нуль-плоскостей пространств Sy^5, $\mathbb{C}\bar{S}y^5$ и $\mathbb{H}\bar{S}y^5$. Фрейденталь называл эти многообразия соответственно вещественными, комплексными, кватернионными и октонион-

ными *симплектами*. Будем обозначать симплекты пространств Sy^5, $\mathbb{C}\bar{S}y^5$ и $\mathbb{H}\bar{S}y^5$ так же, как сами эти пространства. Так как над телом $\mathbb{O}$ нельзя определить пятимерное проективное пространство, будем применять обозначение $\mathbb{O}\bar{S}y^5$ только для октонионных симплектов.

Используя понятие симплекта, Фрейденталь определил «магический квадрат», состоящий из 16 простых или полупростых групп Ли или из пространств, группами преобразований которых являются эти группы.

В первой строке квадрата пространств Фрейденталь поместил эллиптические плоскости

$$S^2,\ \mathbb{C}\bar{S}^2,\ \mathbb{H}\bar{S}^2,\ \mathbb{O}\bar{S}^2; \tag{3.38}$$

во второй строке — проективные плоскости

$$P^2,\ \mathbb{C}P^2,\ \mathbb{H}P^2,\ \mathbb{O}P^2; \tag{3.39}$$

в третьей строке — симплектические пространства, или симплекты,

$$Sy^5,\ \mathbb{C}\bar{S}y^5,\ \mathbb{H}\bar{S}y^5,\ \mathbb{O}\bar{S}y^5; \tag{3.40}$$

в четвертой строке — геометрии, которые Фрейденталь назвал *метасимплектическими*

$$Ms,\ \mathbb{C}Ms,\ \mathbb{H}Ms,\ \mathbb{O}Ms. \tag{3.41}$$

Группами движений плоскостей (3.38) являются компактные простые группы Ли классов

$$B_1,\ A_2,\ C_3,\ F_4; \tag{3.42}$$

группами коллинеаций плоскостей (3.39) являются некомпактные простые и полупростые группы Ли классов

$$A_2,\ A_2 \times A_2,\ A_5,\ E_6; \tag{3.43}$$

группами преобразований симплектов являются некомпактные простые группы Ли классов

$$C_3,\ A_5,\ D_6,\ E_7; \tag{3.44}$$

группами преобразований метасимплектических геометрий являются некомпактные особые простые группы Ли классов

$$F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8. \tag{3.45}$$

Заметим, что квадрат групп симметричен относительно его главной диагонали.

Проективные плоскости (3.39) допускают интерпретации в виде эрмитовых эллиптических плоскостей

$$\mathbb{C}'\bar{S}^2,\ \mathbb{C}'\mathbb{C}\tilde{S}^2,\ \mathbb{C}'\mathbb{H}\tilde{S}^2,\ \mathbb{C}'\mathbb{O}\tilde{S}^2. \tag{3.46}$$

Симплекты (3.40) допускают интерпретации в виде абсолютов эрмитовых эллиптических плоскостей

$$\mathbb{H}'\bar{S}^2,\ \mathbb{H}'\mathbb{C}\tilde{\tilde{S}}^2,\ \mathbb{H}'\mathbb{H}\tilde{\tilde{S}}^2,\ \mathbb{H}'\mathbb{O}\tilde{\tilde{S}}^2. \tag{3.47}$$

Метасимплектические геометрии (3.41) допускают интерпретации в виде абсолютов эрмитовых эллиптических плоскостей

$$\mathbb{O}'\bar{S}^2,\ \mathbb{O}'\mathbb{C}\tilde{\tilde{S}}^2,\ \mathbb{O}'\mathbb{H}\tilde{\tilde{S}}^2,\ \mathbb{O}'\mathbb{O}\tilde{\tilde{S}}^2. \tag{3.48}$$

Заменяя в формулах (3.46), (3.47) и (3.48) алгебры $\mathbb{C}'$, $\mathbb{H}'$ и $\mathbb{O}'$ полем $\mathbb{C}$ и телами $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$, мы получим эрмитовы эллиптические плоскости с компактными группами движений.

Применяя к особым простым группам Ли квазикартанов алгоритм, мы получим квазипростые группы Ли, в том числе группы движений эрмитовых евклидовых плоскостей $\mathbb{O}\bar{R}^2$, $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{\tilde{R}}^2$, $\mathbb{H}\mathbb{O}\tilde{\tilde{R}}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{\tilde{R}}^2$ и группы движений эрмитовых эллиптических плоскостей $\mathbb{O}^0\bar{S}$, $\mathbb{C}\mathbb{O}^0\tilde{\tilde{S}}^2$, $\mathbb{H}\mathbb{O}^0\tilde{\tilde{S}}$ и $\mathbb{O}\mathbb{O}^0\tilde{\tilde{S}}^2$.

Конечные геометрии

Заменяя в определении пространств $\mathbb{C}L^n$, $\mathbb{C}E^n$ и $\mathbb{C}P^n$ поле $\mathbb{C}$ произвольным полем $\mathbb{F}$, мы получим линейное пространство $\mathbb{F}L^n$, аффинное пространство $\mathbb{F}E^n$ и проективное пространство $\mathbb{F}P^n$ над этим полем. В частности, эти пространства можно определить над конечными полями Галуа $\mathbb{F}_q$.

Пространство $\mathbb{F}_qE^n$ содержит конечное число точек, равное q^n. Пространство $\mathbb{F}_qP^n$ содержит конечное число точек, равное

$$q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1 = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Аффинные преобразования пространства $\mathbb{F}_qE^n$ имеют вид (3.28), коллинеации пространства $\mathbb{F}_qP^n$ имеют вид (3.29). Группа преобразований (3.29) в случае, когда автоморфизм $f(x)$ — тождественное преобразование, является простой конечной группой типа Ли класса A_n.

В пространстве F_qL^{2n} можно определить геометрию эллиптического пространства $\mathbb{F}_qS^{2n}$. В пространстве $\mathbb{F}_qP^{n-1}$ можно определить геометрии эллиптического пространства $\mathbb{F}_qS^{2n-1}$, гиперболического пространства $\mathbb{F}_qH^{2n-1}$ и симплектического пространства $\mathbb{F}_qSy^{2n-1}$.

Геометрии эллиптических и гиперболического пространств определяются их абсолютами — гиперквадриками $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. В пространствах $\mathbb{F}_qL^{2n+1}$ всякую квадратичную форму можно привести к виду

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_0x_1 + \ldots + x_{2n-2}x_{2n-1} + x_{2n}^2. \tag{3.49}$$

В пространстве $\mathbb{F}_q L^{2n}$ всякую квадратичную форму $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно привести к одному из двух видов

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_0 x_1 + \ldots + x_{2n-2} x_{2n-1} \tag{3.50}$$

или

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_0 x_1 + \ldots + x_{2n-1} x_{2n-3} + x_{2n-2}^2 + \alpha x_{2n-1}^2, \tag{3.51}$$

где α — элемент поля F_q, не являющийся квадратом.

Гиперквадрики $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, у которых формы $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ приводятся к виду (3.50) и (3.51), называются соответственно *гиперболической* и *эллиптической* гиперквадриками.

Абсолютом пространства $\mathbb{F}_q S^{2n}$ является гиперквадрика пространства $\mathbb{F}_q P^{2n}$, абсолютом пространства $\mathbb{F}_q S^{2n-1}$ является эллиптическая гиперквадрика пространства $\mathbb{F}_q P^{2n-1}$, абсолютом пространства $\mathbb{F}_q H^{2n-1}$ является гиперболическая гиперквадрика пространства $\mathbb{F}_q P^{2n-1}$.

Число точек гиперквадрики пространства $\mathbb{F}_q P^{2n}$ равно числу точек пространства $\mathbb{F}_q P^{2n-1}$, т. е. $(q^{2n} - 1)/(q - 1)$.

Число точек эллиптической гиперквадрики пространства $\mathbb{F}_q P^{2n+1}$ равно $(q^{n+1} + 1)(q^n - 1)/(q - 1)$.

Число точек гиперболической гиперквадрики пространства $\mathbb{F}_q P^{2n-1}$ равно $(q^{n+1} + 1)(q^n - 1)/(q - 1)$.

В частности, в пространстве $\mathbb{F}_q P^3$ число точек эллиптической квадрики равно $q^2 + 1$, число точек гиперболической квадрики равно $(q + 1)^2$, на плоскости $\mathbb{F}_q P^2$ число точек конического сечения равно $q + 1$. Движения пространств $\mathbb{F}_q S^{2n}$, $\mathbb{F}_q S^{2n-1}$ и $\mathbb{F}_q H^{2n-1}$ являются коллинеациями (3.29), переводящими в себя абсолюты этих пространств. Эти группы в том случае, когда автоморфизм $f(x)$ является тождественным преобразованием, представляют собой конечные группы типа Ли. Эти группы не простые, но обладают простыми инвариантными подгруппами. В случае пространств $\mathbb{F}_q S^{2n}$ эти группы являются конечными группами типа Ли класса B_n, в случае пространств $\mathbb{F}_q H^{2n-1}$ — конечными группами типа Ли класса D_n, в случае пространств $\mathbb{F}_q S^{2n-1}$ — 2-скрученными конечными группами типа Ли класса D_n.

В пространствах $\mathbb{F}_q S^{2n}$, $\mathbb{F}_q S^{2n-1}$ и $\mathbb{F}_q H^{2n-1}$ пары точек обладают метрическими инвариантами, аналогичными расстояниям между точками вещественных эллиптических и гиперболических пространств.

Абсолюты пространств $\mathbb{F}_q S^{2n}$ и $\mathbb{F}_q S^{2n+1}$ можно рассматривать как конформные пространства $\mathbb{F}_q C^{2n-1}$ и $\mathbb{F}_q C^{2n}$, абсолют пространства $\mathbb{F}_q H^{2n+1}$ — как псевдоконформное пространство $\mathbb{F}_q C_1^{2n}$.

Геометрия симплектического пространства $\mathbb{F}_q Sy^{2n-1}$ определяется абсолютным линейным комплексом прямых (3.20) этого пространства. Симплектические преобразования этого пространства являются коллинеациями (3.29), переводящими в себя абсолютный линейный комплекс. Группы этих преобразований в том случае, когда автоморфизм $f(x)$ является тождественным преобразованием, представляют собой простые конечные группы типа Ли класса C_n.

В пространстве $\mathbb{F}_q P^n$, где $q = r^2$, можно определить геометрию эрмитова *эллиптического пространства* $\mathbb{F}_q S^n$, абсолютом которого является *эрмитова гиперквадрика* (3.26), в уравнении которой $\bar{x}$ обозначает x^r. Движения этого пространства являются коллинеациями (3.29) и произведениями этих коллинеаций на преобразование $'x = x^r$. Эти группы в том случае, когда автоморфизм $f(x)$ является тождественным преобразованием, представляют собой 2-скрученные конечные группы типа Ли класса A_n.

Образы симметрии

Одним из важнейших классов геометрических образов однородных пространств являются *образы симметрии*, т. е. такие геометрические образы, которые определяются инволютивными преобразованиями фундаментальных групп этих пространств. В большинстве случаев эти образы являются множествами точек, остающихся неподвижными при инволютивных преобразованиях, в некоторых случаях эти образы состоят из прямых, переходящих в себя при инволютивных преобразованиях. Многие образы симметрии были определены Картаном в его работах о симметрических пространствах. Термин «образ симметрии» (être de symétrie) был введен Картаном в работе [94].

В пространстве S^n образами симметрии являются *m-мерные плоскости* и их полярные $(n-m-1)$-мерные плоскости и, при нечетном n, *паратактические конгруэнции* прямых. Отражение от m-мерной плоскости и ее поляры можно привести к виду

$$'x_a = -x_a, \quad 'x_u = x_u. \tag{3.52}$$

При $m = 0$ этот образ симметрии является точкой и ее полярной гиперплоскостью, при $m = 1$ — прямой и ее полярной $(n-2)$-мерной плоскостью.

Паратактическая конгруэнция состоит из паратактичных прямых, т. е. прямых с равными стационарными расстояниями. Паратактичные прямые пространства S были открыты Клиффордом [Кли], называвшим их «параллельными». Термин «паратактичные прямые» был предложен

Штуди [Stu2]. Симметрия относительно паратактической конгруэнции является сдвигом вдоль прямых этой конгруэнции на полупрямую и приводится к виду

$$'x_{2i} = -x_{2i+1}, \quad 'x_{2i+1} = x_{2i}. \tag{3.53}$$

В пространстве $\mathbb{C}\bar{S}^n$ образами симметрии являются m-мерные плоскости и их полярные $(n-m-1)$-мерные плоскости, *нормальные n-цепи* и, при нечетном n, паратактические конгруэнции прямых. Отражение от m-мерной плоскости и ее поляры можно привести к виду (3.52). При $m = 0$ этот образ симметрии является точкой и ее полярной гиперплоскостью, при $m = 1$ — прямой и ее полярной $(n-2)$-мерной плоскостью.

Нормальными n-цепями пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ называются множество точек этого пространства с вещественными координатами и все множества точек, получаемые из него движениями этого пространства. Отражение от нормальной n-цепи приводится к виду

$$'x_i = \bar{x}_i. \tag{3.54}$$

Паратактическая конгруэнция состоит из паратактичных прямых, т. е. прямых с равными стационарными расстояниями. Так как прямые пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ изометричны сферам пространства R^3, симметрия относительно паратактической конгруэнции состоит в преобразовании каждой ее прямой, изображаемом переходом от каждой точки сферы к ее диаметрально противоположной точке, и приводится к виду

$$'x_{2i} = -\bar{x}_{2i+1}, \quad 'x_{2i+1} = \bar{x}_{2i}. \tag{3.55}$$

В пространстве $\mathbb{H}\bar{S}^n$ образами симметрии являются m-мерные плоскости и их полярные $(n-m-1)$-мерные плоскости, а также *нормальные комплексные n-цепи*. Отражение от m-мерной плоскости и ее поляры можно привести к виду (3.52). При $m = 0$ этот образ симметрии является точкой и ее полярной гиперплоскостью, при $m = 1$ — прямой и ее полярной $(n-2)$-мерной плоскостью.

Нормальными комплексными n-цепями пространства $\mathbb{H}\bar{S}$ называются множество точек этого пространства с координатами вида $a + bi$ и все множества точек, получаемые из него движениями этого пространства. Отражения от нормальных комплексных n-цепей приводятся к виду

$$'x_i = -ix_i i. \tag{3.56}$$

На плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ образами симметрии являются точки и их полярные прямые, а также *нормальные кватернионные 2-цепи*. Отражение от точки и ее полярной прямой можно привести к виду (3.52).

Нормальными кватернионными n-цепями плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ называются множество точек этой плоскости с координатами вида $a + bi + cj + dk$ и все множества точек, получаемые из него движениями этой плоскости. Отражение от нормальной кватернионной 2-цепи приводится к виду

$$'x_i = \check{x}_i. \tag{3.57}$$

На плоскости $\mathbb{CO}\tilde{\bar{S}}^2$ образами симметрии являются точки и их полярные прямые, отражения от которых приводятся к виду (3.52), *нормальные бикватернионные 2-цепи*, отражения от которых приводятся к виду (3.57), *нормальные октонионные 2-цепи*, отражения от которых приводятся к виду $'x_i = \check{x}_i$, где $'x = \check{x}$ — замена мнимой единицы l на $-l$, и *нормальные 2-бицепи*, отражения от которых приводятся к виду $'x_i = \check{x}_i$ (см. с. 108).

На плоскости $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{S}}^2$ образами симметрии являются точки и их полярные прямые, отражения от которых приводятся к виду (3.52), *нормальные биоктонионные 2-цепи*, отражения от которых приводятся к виду (3.56), нормальные 2-цепи, изометричные плоскости $\mathbb{H}^2\tilde{\bar{S}}^2$, отражения от которых приводятся к виду (3.57), и нормальные 2-бицепи, отражения от которых приводятся к виду $x'_i = -i\check{x}_i i$.

На плоскости $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{S}}^2$ образами симметрии являются точки и их полярные прямые, отражения от которых приводятся к виду (3.52), нормальные 2-цепи, изометричные плоскости $\mathbb{HO}\tilde{\bar{S}}^2$, отражения от которых приводятся к виду (3.57), и нормальные 2-бицепи, отражения от которых приводятся к виду $'x_i = \check{x}_i$.

В проективных пространствах, наряду с образами симметрии, определяемыми инволютивными коллинеациями, имеются *образы косимметрии*, определяемые инволютивными корреляциями.

В пространстве P^n образами симметрии являются «m-пары», состоящие из m-мерной и $(n - m - 1)$-мерной плоскостей, симметрии относительно которых приводятся к виду (3.52), и *эллиптические линейные конгруэнции прямых*, симметрии относительно которых приводятся к виду (3.53). Образами косимметрии этого пространства являются гиперквадрики и линейные комплексы прямых.

В пространстве $\mathbb{C}P^n$ образами симметрии являются m-пары и *эрмитовы эллиптические конгруэнции прямых*, симметрии относительно которых приводятся к виду (3.55). Образами косимметрии этого пространства являются гиперквадрики, линейные комплексы прямых и эрмитовы гиперквадрики.

В пространстве $\mathbb{H}P^n$ образами симметрии являются m-пары и комплексные n-цепи, симметрии относительно которых приводятся к ви-

ду (3.56). Образами косимметрии этого пространства являются эрмитовы гиперквадрики и многообразия нуль-точек пространств $\mathbb{H}\bar{S}y^n$.

Образами симметрии плоскости $\mathbb{O}P^2$ являются пары (точка, прямая) и 2-цепи, симметрии относительно которых приводятся к виду (3.57).

Образы симметрии можно определить также в пространствах, группы преобразований которых можно получить из простых групп Ли квазикартановым алгоритмом. В частности, образами симметрии пространства R^n являются m-мерные плоскости, при $m = 0$ — точки, при $m = 1$ — прямые, при $m = n - 1$ — гиперплоскости. Образами симметрии пространств $\mathbb{C}\bar{R}^n$ и $\mathbb{H}\bar{R}^n$ являются m-мерные плоскости и соответственно нормальные и комплексные нормальные n-цепи. Образами симметрии плоскости $\mathbb{O}\bar{R}^2$ являются точки, прямые и кватернионные 2-цепи.

Параболические образы

Другим важным классом геометрических образов однородных пространств, фундаментальные группы которых — простые группы Ли, являются *параболические образы*.

В каждой простой группе Ли имеется *подгруппа Бореля* — максимальная разрешимая подгруппа этой группы. Подгруппы простых групп Ли, содержащие подгруппы Бореля, называются *параболическими подгруппами*. Геометрические образы пространств с простыми фундаментальными группами, стационарные подгруппы которых — параболические подгруппы, называются *параболическими образами*.

Исай Львович Кантор (р. 1932) в работе [Кан1] доказал, что параболические подгруппы простых групп Ли определяются одним или несколькими простыми корнями этих групп. Для каждого простого корня или нескольких простых корней можно определить представление алгебры Ли $\mathbf{G}$ простой группы Ли G в виде прямой суммы подпространств

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{-h} + \mathbf{G}_{-h+1} + \ldots + \mathbf{G}_{-1} + \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 + \ldots + \mathbf{G}_{h-1} + \mathbf{G}_h, \qquad (3.58)$$

где подпространство $\mathbf{G}_k$ состоит из линейных комбинаций собственных векторов линейных преобразований $X \to [HX]$, соответствующих таким корневым векторам, у которых коэффициент при данном простом корневом векторе или сумма коэффициентов при данных корневых векторах в их разложении по простым корневым векторам является числом k, а подпространство $\mathbf{G}_0$, кроме указанных линейных комбинаций, содержит также подалгебру Картана алгебры $\mathbf{G}$.

Прямая сумма подпространств

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 + \ldots + \mathbf{G}_{h-1} + \mathbf{G}_h \qquad (3.59)$$

является алгеброй Ли некоторой параболической подгруппы группы G, и каждая параболическая подгруппа группы G может быть получена таким образом.

Наиболее важны параболические подгруппы, определяемые отдельными простыми корнями групп Ли. Эти подгруппы являются максимальными неполупростыми подгруппами простых групп Ли. Эти подгруппы были впервые найдены Владимиром Владимировичем Морозовым (1910—1975) в его диссертации [Мор].

Геометрические образы, стационарные подгруппы которых являются параболическими подгруппами простых групп Ли, называются параболическими образами однородных пространств с простыми фундаментальными группами. В том случае, когда параболическая подгруппа определяется простыми корневыми векторами $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k$, параболические образы называются $(\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k)$-образами. Параболические α_i-образы, тесно связанные с фундаментальными линейными представлениями простых групп Ли, называются *фундаментальными образами*. Термин «фундаментальные образы» (elements fondamentaux) был введен Титсом в работе [Ti2].

Связь фундаментальных образов с фундаментальными линейными представлениями простых групп Ли состоит в том, что при линейном представлении φ происходят линейные преобразования координат α_i-образов.

Фундаментальными α_i-образами пространств P^n и $\mathbb{C}P^n$ являются $(i-1)$-мерные плоскости этих пространств, при $i=1$ — точки, при $i=2$ — прямые, при $i=n$ — гиперплоскости.

Фундаментальными α_i-образами пространств S_n^{2n} и $\mathbb{C}S^{2n}$ являются $(i-1)$-мерные плоские образующие абсолютов этих пространств, при $i=1$ — точки абсолютов, при $i=2$ — прямолинейные образующие абсолютов.

Фундаментальными α_i-образами пространств Sy^{2n-1} и $\mathbb{C}S^{2n}$ являются точки этих пространств и $(i-1)$-мерные нуль-плоскости этих пространств, при $i=2$ — нуль-прямые.

Фундаментальными α_i-образами пространств Sy^{2n-1} и $\mathbb{C}S^{2n}$ при $i < n-1$ являются $(i-1)$-мерные плоские образующие абсолютов этих пространств, при $i=1$ — точки абсолютов, при $i=2$ — прямолинейные образующие абсолютов. Фундаментальными α_{n-1}-образами и α_n-образами этих пространств являются $(n-1)$-мерные плоские образующие абсолютов этих пространств, принадлежащие к двум непрерывным семействам. Плоские образующие $n-2$ измерений, т. е. пересечения $(n-1)$-мерных плоских образующих разных семейств, являются (α_{n-1}, α_n)-образами этих пространств.

Фундаментальными α_i-образами пространств S^{2n}, S^{2n-1}, H^{2n}, H^{2n-1}, S_k^{2n} при $k < n$, H_k^{2n} при $k < n-1$, S_k^{2n-1} при $k < n$ и $l < n-1$ и H_k^{2n-1} при $k, l < n-1$, являются вещественные или мнимые $(i-1)$-мерные плоские образующие абсолютов этих пространств, при $i = 1$ — точки абсолютов, при $i = 2$ — прямолинейные образующие абсолютов. В случае пространств S^{2n} и S^{2n-1} все эти образы мнимые. В случае пространств H^{2n} и H^{2n-1} из этих образов вещественны только точки. В случае пространств S_k^{2n} и S_k^{2n-1} из этих образов вещественны только точки, прямолинейные образующие и h-мерные плоские образующие при $h = 2, 3, \ldots, k-1$. В случае пространств H_k^{2n} и H_k^{2n-1} из этих образов вещественны только точки, прямолинейные образующие и h-мерные плоские образующие при $h = 2, 3, \ldots, k$. В случае пространств S_{n-1}^{2n-1} и H_{n-1}^{2n-1} фундаментальными образами являются также мнимо сопряженные $(n-1)$-мерные плоские образующие. В случае пространств S_k^{2n-1} при $k < n-1$ и H_k^{2n-1} при $k < n-2$ фундаментальными образами являются также мнимые $(n-1)$-мерные плоские образующие двух семейств.

В пространстве $\mathbb{H}P^n$ вещественными фундаментальными образами являются α_{2i}-образы, называемые $(i-1)$-мерными плоскостями (при $i = 1$ — точками, при $i = 2$ — прямыми, ..., при $i = n$ — гиперплоскостями). Мнимыми фундаментальными образами этого пространства являются α_{2i-1}-образы, называемые $(2i-1)/2$-*мерными плоскостями* (при $i=0$ — *полуточками*, при $i=1$ — *полупрямыми*, ..., при $i=n-1$ — *полугиперплоскостями*, при $i = n$ — *полупространствами*).

Параболическими $(\alpha_i, \alpha_{n-i+1})$-образами пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{C}\bar{H}^n$, $\mathbb{C}\bar{S}_k^n$ и $\mathbb{C}\bar{H}_k^n$ являются $(i-1)$-мерные плоские образующие абсолютов этих пространств, при $i = 1$ — точки абсолютов, при $i = 2$ — прямолинейные образующие абсолютов. В случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ все эти образы мнимые. В случае пространства $\mathbb{C}\bar{H}^n$ из этих образов вещественны только точки. В случае пространств $\mathbb{C}\bar{S}_k^n$ из этих образов вещественны только точки, прямолинейные образующие и h-мерные плоские образующие при $h = 2, 3, \ldots, k-1$. В случае пространств $\mathbb{C}\bar{H}_k^n$ из этих образов вещественны только точки, прямолинейные образующие и h-мерные плоские образующие при $h = 2, 3, \ldots, k$.

Фундаментальными α_{2i}-образами пространств $\mathbb{H}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{H}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}_k^n$ и $\mathbb{H}\bar{H}_k^n$ являются $(i-1)$-мерные плоские образующие абсолютов этих пространств, при $i = 1$ — точки абсолютов, при $i = 2$ — прямолинейные образующие абсолютов. В случае пространства $\mathbb{H}\bar{S}^n$ все эти образы мнимые. В случае пространства $\mathbb{H}\bar{H}^n$ из этих образов вещественны только точки. В случае пространств $\mathbb{H}\bar{S}_k^n$ из этих образов вещественны только точки, прямолинейные образующие и h-мерные плоские образующие

при $h = 2, 3, \ldots, k-1$. В случае пространств $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ из этих образов вещественны только точки, прямолинейные образующие и h-мерные плоские образующие при $h = 2, 3, \ldots, k$. Фундаментальными α_{2i-1}-образами этих пространств являются $(2i-1)/2$-мерные плоские образующие этих пространств, все эти образы мнимые.

Фундаментальными α_{2i}-образами пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^n$ являются $(i-1)$-мерные нуль-плоскости этого пространства, при $i = 1$ — нуль-точки, при $i = 2$ — нуль-прямые. Фундаментальными α_{2i-1}-образами этого пространства являются мнимые $(2i-1)/2$-мерные нуль-плоскости этого пространства, при $i = 0$ — нуль-полуточки, при $i = 1$ — нуль-полупрямые.

В общем случае параболические образы этих пространств являются «флагами», состоящими из вложенных друг в друга фундаментальных образов, вследствие чего многообразия параболических образов иногда называют «флаговыми многообразиями».

Фундаментальными α_1-образами метасимплектической геометрии Ms являются *симплекты* этой геометрии, α_2-образами — нуль-плоскости этих симплектов, α_3-образами — нуль-прямые этих симплектов, α_4-образами — нуль-точки этих симплектов. Эти нуль-точки совпадают с точками абсолюта эрмитовой эллиптической плоскости $\mathbb{O}'\bar{S}^2$. Фундаментальные образы эллиптической плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ и гиперболической плоскости $\mathbb{O}\bar{H}^2$ имеют тот же вид. В случае плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ все они мнимы.

Из фундаментальных образов комплексной метасимплектической геометрии $\mathbb{C}Ms$ отметим α_6-образы, являющиеся симплектами этой геометрии и α_3-образы, которые являются нуль-плоскостями этих симплектов. Из параболических образов этой геометрии отметим (α_2, α_4)-образы, являющиеся нуль-прямыми этих симплектов, и (α_1, α_5)-образы — нуль-точки этих симплектов. Эти нуль-точки совпадают с точками абсолюта эрмитовой эллиптической плоскости $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$. Фундаментальные образы плоскостей $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$, $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{\bar{H}}^2$, $\mathbb{C}'\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$ и $\mathbb{C}'\mathbb{O}'\tilde{\bar{S}}^2$ аналогичны фундаментальным образам плоскости $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$. В случае плоскости $\mathbb{C}\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$ все фундаментальные образы мнимы.

Из фундаментальных образов кватернионной метасимплектической геометрии $\mathbb{H}Ms$ отметим α_6-образы, являющиеся симплектами этой геометрии, α_5-образы, которые являются нуль-плоскостями этих симплектов, α_4-образы, являющиеся нуль-прямыми этих симплектов, и α_2-образы — нуль-точки этих симплектов. Эти нуль-точки совпадают с точками абсолюта эрмитовой эллиптической плоскости $\mathbb{H}\mathbb{O}'\tilde{\bar{S}}^2$. Фундаментальные образы плоскостей $\mathbb{H}\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$, $\mathbb{H}\mathbb{O}\tilde{\bar{H}}$, $\mathbb{H}'\mathbb{O}'\tilde{\bar{S}}$ и $\mathbb{H}'\mathbb{O}'\tilde{\bar{S}}^2$ аналогичны фундаментальным образам плоскости $\mathbb{H}'\mathbb{O}'\tilde{\bar{S}}^2$. В случае плоскости $\mathbb{H}\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$ все фундаментальные образы мнимы.

Из фундаментальных образов октонионной метасимплектической геометрии $\mathbb{O}Ms$ отметим α_1-образы, являющиеся симплектами этой геометрии, α_2-образы, которые являются нуль-плоскостями этих симплектов, α_3-образы, являющиеся нуль-прямыми этих симплектов, и α_7-образы — нуль-точки этих симплектов. Эти нуль-точки совпадают с точками абсолюта эрмитовой эллиптической плоскости $\mathbb{O}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$. Фундаментальные образы плоскостей $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$, $\mathbb{O}^2\tilde{H}^2$ и $\mathbb{O}'^2\tilde{S}^2$ аналогичны фундаментальным образам плоскости $\mathbb{O}'\mathbb{O}\tilde{S}^2$. В случае плоскости $\mathbb{O}^2\tilde{S}^2$ все фундаментальные образы мнимы.

Фундаментальные образы однородных пространств, фундаментальные группы которых являются некомпактными простыми группами Ли, наглядно изображаются на диаграммах Сатаке этих групп (рис. 2.10 и 2.11). Вещественные фундаментальные образы изображаются белыми точками этих диаграмм, мнимые образы — черными точками, а мнимо сопряженные образы — белыми точками, соединенными дугами с двумя стрелками.

В статье [82] Картан определил принципы двойственности и принцип тройственности некоторых однородных пространств с простыми фундаментальными группами.

Точки диаграмм Дынкина и Сатаке, изображающие двойственные фундаментальные образы, расположены симметрично относительно осей симметрии этих диаграмм.

В случае групп класса A_n имеет место *классический принцип двойственности* пространства P^n и его аналоги в пространствах $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{H}P^n$. Согласно этим принципам, α_i-образы этих пространств соответствуют α_{n-i+1}-образам, т. е. точки соответствуют гиперплоскостям, прямые — $(n-2)$-мерным плоскостям и m-мерные плоскости — $(n-m-1)$-мерным плоскостям.

В случае групп класса D_n в пространствах S^{2n-1}, $\mathbb{C}S^{-2n+1}$, S_n^{2n-1}, H_{n-1}^{2n-1} имеет место двойственность между α_{n-1}-образами и α_n-образами, т. е. между $(n-1)$-мерными плоскими образующими абсолютов этих пространств, принадлежащих двум разным непрерывным семействам.

В случае групп класса E_6 имеет место *проективный принцип двойственности* плоскостей $\mathbb{O}P^2$, $\mathbb{C}\mathbb{O}P^2$, $\mathbb{O}'P^2$, согласно которому α_1-образы этих плоскостей, т. е. их точки, соответствуют α_5-образам, т. е. прямым.

В случае групп класса D_4 имеет место *принцип тройственности*. Согласно этому принципу в пространствах S^7, $\mathbb{C}S^7$ и S_4^7 α_1-образы, т. е. точки абсолютов этих пространств, соответствуют α_3-образам и α_4-образам, т. е. трехмерным плоским образующим этих абсолютов, принадлежащим разным семействам, а α_2-образы, т. е. прямолинейные

образующие этих абсолютов, соответствуют самим себе. Согласно этому принципу, прямые линии этих пространств, пересекающие абсолюты этих пространств в парах точек, соответствуют паратактическим конгруэнциям прямых, определяемым парами трехмерных плоских образующих абсолютов этих пространств, принадлежащих одному семейству.

Эквивалентные геометрии

В главе «Эквивалентные геометрии» статьи [46] Картан перечислил однородные пространства, фундаментальными группами которых являются изоморфные простые группы Ли. Изоморфизму групп классов A_i и D_i соответствует изометрия прямой $\mathbb{C}\bar{S}^1$ и сферы в пространстве R^3, изометрия прямых $\mathbb{C}\bar{H}'$ и $\mathbb{C}'\bar{S}'$ и сферы в пространстве R^3_1, интерпретация прямой P^1 в виде абсолюта плоскости H^2 и интерпретация этого абсолюта в виде *норм-кривой* $x_i = t^i$ в пространстве P^r.

Изоморфизму групп классов B_2 и C_2 соответствует изометрия прямой $\mathbb{H}\bar{S}^1$ и гиперсферы в пространстве R^5, изометрия прямой $\mathbb{H}'\bar{H}^1$ и гиперсферы в пространстве R^5_1, изометрия прямой $\mathbb{H}'\bar{S}'$, гиперсферы в пространстве R^5_2 и многообразия прямых пространства Sy^3, за расстояние между которыми принят их симплектический инвариант.

Изоморфизму группы класса D_2 и прямому произведению двух групп класса B_1, или комплексной группы класса B_1, соответствуют интерпретации Котельникова—Штуди многообразий прямых пространств S^3 и H^3 в виде сфер пространств $\mathbb{C}'R^3$ и $\mathbb{C}R^3$, интерпретация прямой $\mathbb{C}P^1$ в виде абсолюта пространства H^3 и интерпретация прямой $\mathbb{H}\bar{S}y^1$ на паре плоскостей S^2 и H^2.

Интерпретация Котельникова—Штуди многообразия прямых пространства S^3 равносильна интерпретации Фубини [Ful] этого многообразия на паре сфер пространства R^3.

Изоморфизму групп классов A_3 и D_3 соответствует интерпретация пространства $\mathbb{C}\bar{S}^3$ в пространстве S^5, при которой точки каждого из этих пространств изображаются паратактическими конгруэнциями другого пространства, аналогичны интерпретация пространства $\mathbb{C}\bar{S}^3_2$ в пространстве S^5_2, интерпретация прямой $\mathbb{H}P^1$ в виде абсолюта пространства H^5, интерпретация Плюккера многообразия прямых пространства P^3 в виде абсолюта пространства S^5_3 и интерпретация плоскости $\mathbb{H}\bar{S}y^2$ в пространстве $\mathbb{C}\bar{S}^3_1$.

Из принципа тройственности пространства S^7 вытекает изоморфизм группы движений пространства S^7_2 и группы симплектических преобразований пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^3$, получаемых из группы движений пространства S^7 картановыми алгоритмами, соответствующими инволютивным ав-

томорфизмам этой группы, определяемым отражением от прямой и симметрией относительно паратактической конгруэнции прямых пространства S^7. Этот изоморфизм определяет интерпретацию пространства $\mathbb{H}\bar{S}y^3$ в пространстве S_2^7.

К этим интерпретациям добавим интерпретации прямой $\mathbb{O}\bar{S}^1$ в виде гиперсферы в пространстве R^9 и прямой $\mathbb{O}P^1$ в виде абсолюта пространства H^9.

Изоморфные группы EVI движений плоскостей $\mathbb{HO}\tilde{H}^2$ и $\mathbb{HO}\tilde{\bar{S}}^2$, характеры которых равны -5, и группы EVIII движений плоскостей $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{S}}^2$ и $\mathbb{O}'\tilde{\bar{S}}^2$, характеры которых равны 8, Картан не различал.

В статье [94] Картан определил подгруппы компактных простых групп Ли классов E_6, E_7 и E_8, являющиеся стационарными подгруппами образов симметрии однородных пространств, группами преобразований которых являются эти группы. Картан показал, что в случае группы класса E_6 одна из этих подгрупп изоморфна компактной простой группе класса C_4, в случае группы класса E_7 одна из этих подгрупп изоморфна компактной простой группе класса A_7, а в случае группы класса E_8 одна из этих подгрупп изоморфна компактной простой группе Ли класса D_8. Эти образы симметрии являются нормальными 2-бицепями эрмитовых эллиптических плоскостей $\mathbb{CO}\tilde{L}^2$, $\mathbb{HO}\tilde{\bar{S}}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{S}}^2$. Установленные Картаном изоморфизмы определяют эквивалентность геометрий этих 2-бицепей геометриям соответственно пространств $\mathbb{H}\bar{S}^3$, $\mathbb{CH}\tilde{\bar{S}}^3$ и $\mathbb{H}^2\bar{S}^3$. В интерпретации Н. М. Заблоцких [Заб] нормальной 2-бицепи плоскости $\mathbb{CO}\tilde{\bar{S}}^2$ в пространстве $\mathbb{H}\bar{S}^3$ и в аналогичных интерпретациях нормальных 2-бицепей плоскостей $\mathbb{HO}S^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{S}}^2$ в пространствах $\mathbb{CH}\tilde{\bar{S}}^3$ и $\mathbb{H}^2\tilde{\bar{S}}^3$ точки 2-бицепей изображаются прямыми трехмерных пространств.

Имеются также эквивалентные геометрии с квазипростыми фундаментальными группами. Таковы геометрии прямых $\mathbb{C}\bar{R}^1$, $\mathbb{H}\bar{R}^1$ и $\mathbb{O}\bar{R}^1$, которые эквивалентны, соответственно, геометриям плоскости R^2 и пространств R^4 и R^8, геометрия пространства R^3, которая в силу интерпретации Котельникова—Штуди эквивалентна геометрии сферы в пространстве $\mathbb{C}^0\bar{R}^3$, и геометрии пространств $S^{1,3}$ и $H^{1,3}$, которые в силу интерпретаций И. И. Железиной [Жел] эквивалентны геометриям плоскостей $\mathbb{C}'R^2$ и $\mathbb{C}R^2$.

Эквивалентные геометрии имеются и в случае пространств с бикквазипростыми фундаментальными группами. К ним относятся геометрии пространств Γ^3 и I^3, которые в силу интерпретаций, установленных в работах [ШиА1], [ШиА2] Александром Петровичем Широковым (1926—1998), эквивалентны геометриям прямых $\mathbb{C}^0\bar{S}^1$ и $\mathbb{C}^0\tilde{\bar{S}}^1$.

Глава 4

Псевдогруппы Ли и уравнения Пфаффа

Псевдогруппы Ли

После того как в диссертации Картана была решена проблема структуры обычных, конечномерных групп Ли, Картан поставил задачу определения структуры бесконечномерных обобщений групп Ли. Картан называл эти обобщения «бесконечными непрерывными группами». Этой проблеме посвящены статьи Картана [21, 22] 1904 г., [23] 1907 г., [26] 1908 г. и [28] 1909 г.

Обычные группы Ли связаны с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, а бесконечномерные обобщения этих групп — с теорией дифференциальных уравнений в частных производных, которой Картан начал заниматься еще в 1899 г.

В настоящее время бесконечномерные обобщения групп Ли, рассматривавшиеся Картаном, называются *псевдогруппами Ли*. Псевдогруппа преобразований, так же как группа преобразований, содержит тождественное преобразование и вместе с каждыми двумя преобразованиями содержит произведение этих преобразований. В отличие от «групп Ли» в псевдогруппах Ли произведение преобразований существует не всегда: каждое преобразование задается функциями, определенными в некоторой области, причем область определения одного преобразования может не иметь общих точек с той областью, в которую второе преобразование переводит свою область определения. Поэтому псевдогруппы преобразований не являются группами. В перечисленных статьях Картан рассматривал области, состоящие из точек с комплексными координатами, и преобразования этих точек, выражаемые аналитическими функциями.

Как и в случае групп Ли, Картан ограничивался рассмотрением преобразований, близких к тождественному, поэтому он не сталкивался со случаями, когда нельзя определить произведения преобразований, и считал рассматриваемые им псевдогруппы группами. Как и в случае групп Ли, Картан рассматривал только такие псевдогруппы преобразований, для которых не существует разбиения преобразуемого многообразия на

классы, переставляемые всеми преобразованиями. Такие группы и псевдогруппы называются примитивными.

Картан доказал, что всякая бесконечномерная примитивная псевдогруппа комплексных аналитических преобразований принадлежит к одному из 6 классов:

1) множество всех аналитических преобразований n комплексных переменных;

2) подмножество множества 1), состоящее из преобразований, обладающих постоянным якобианом (т. е. умножающих все объемы на одно и то же комплексное число);

3) подмножество множества 1), состоящее из преобразований, обладающих единичным якобианом (т. е. сохраняющих все объемы);

4) множество аналитических преобразований $2n \geqslant 4$ комплексных переменных, сохраняющих двойной интеграл

$$\iint_D \sum_i dz_i \wedge dz_{n+i}; \tag{4.1}$$

5) множество аналитических преобразований $2n \geqslant 4$ комплексных переменных, умножающих двойной интеграл (4.1) на комплексную функцию;

6) множество аналитических преобразований $2n+1$ комплексных переменных, умножающих форму $dz_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i\, dz_{n+i}$ на комплексную функцию.

Псевдогруппа класса 4 называется *симплектической псевдогруппой*, так как эти преобразования сохраняют внешнюю форму $\sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge dz_{n+i}$, которая определяет симплектическую геометрию в бесконечно удаленных гиперплоскостях касательных пространств $\mathbb{C}E^{2n}$ рассматриваемого многообразия.

Эту псевдогруппу называют также *гамильтоновой псевдогруппой*, потому что механическую систему с обобщенными координатами q_i и обобщенными импульсами p_i, движение которой описывается уравнениями Гамильтона, можно рассматривать как пространство, в котором задана замкнутая внешняя дифференциальная форма $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$, т. е. такая, что $d\omega = 0$.

Псевдогруппа класса 6 называется *контактной псевдогруппой*, так как в этом случае $2n+1$ комплексных координат можно рассматривать как $2n+2$ координаты $z_0, z_1, \ldots, z_n, w_0, w_1, \ldots, w_n$, связанные условием

$$\Omega(z_0, z_1, \ldots, z_n, w_0, w_1, \ldots, w_n) = 0,$$

устанавливающим соответствие между точками Z с координатами z_i n-мерного пространства и гиперплоскостями W с тангенциальными координатами w_i этого пространства. Такие преобразования называются *контактными преобразованиями*, или *преобразованиями прикосновения*; теория этих преобразований была построена Софусом Ли.

Картан показал, что псевдогруппы классов 1, 3, 4 и 6 являются простыми псевдогруппами, по его терминологии «простыми бесконечными непрерывными группами», а псевдогруппы классов 2 и 5 содержат соответственно псевдогруппы классов 3 и 4 в качестве своих инвариантных подгрупп. Картан называл классы 1, 3, 4 и 6 «четырьмя большими классами простых бесконечных непрерывных групп» и считал их аналогами четырех бесконечных серий простых групп Ли A_n, B_n, C_n и D_n. Имеются аналогичные классы вещественных аналитических преобразований. В статье [46] Картана несколько разделов посвящены вещественным псевдогруппам Ли. Из этих псевдогрупп отметим псевдогруппу преобразований многообразия прямых пространства R^3, при которых *нормальные конгруэнции* (конгруэнции нормалей к поверхностям) переходят в такие же конгруэнции. Картан отметил важное значение этих преобразований для оптики.

Бесконечномерные псевдогруппы получили применение к геометрии в книге Освальда Веблена (1880—1960) и Джона Уайтхеда (1904—1960) «Основания дифференциальной геометрии» [VW], так как такие псевдогруппы образуют преобразования координат дифференциально-геометрических многообразий. Этим псевдогруппам посвящен цикл статей Виктора Владимировича Вагнера (1908—1971), из которых отметим статьи «О теории псевдогрупп преобразований» [Ваг1] и «Алгебраическая теория дифференциальных групп» [Ваг2].

Алгебры Каца—Муди

В настоящее время изучены четыре класса бесконечномерных обобщений алгебр и групп Ли. Как пишет Виктор Григорьевич Кац (р. 1943) в книге «Бесконечномерные группы и их приложения» [Кац2, с. IX—X], первый из этих классов составляют алгебры Ли векторных полей и соответствующие группы преобразований дифференцируемых многообразий; теория этих групп основана И. М. Гельфандом.

Второй из этих классов образуют группы Ли гладких отображений данного многообразия в конечномерную группу Ли; физики называют алгебры Ли этих групп «алгебрами токов».

Третий класс составляют группы линейных операторов в гильбертовых пространствах, т. е. в бесконечномерных аналогах пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$.

Теория линейных представлений некомпактных простых групп Ли унитарными операторами этих пространств, построенная И. М. Гельфандом и его учениками и, независимо от них, Хариш-Чандрой (1923—1983), широко применяется в квантовой физике.

Четвертый из этих классов — алгебры Каца—Муди, определенные В. Г. Кацем в работе [Кац1] и Робертом Муди (р. 1941) в работе [Моо].

Гильбертовы пространства, в которых определяются унитарные представления некомпактных простых групп Ли, образованы комплекснозначными функциями, заданными на многообразиях параболических образов этих групп.

Алгебры Каца—Муди обладают многими свойствами алгебр Ли простых групп Ли: в этих алгебрах определены корневые системы и группы Вейля, которые в этом случае являются бесконечными дискретными группами, порожденными отражениями. Для этих алгебр имеются также диаграммы Дынкина. Алгебры Каца—Муди подразделяются на три типа: нескрученные, 2-скрученные и 3-скрученные. Названия и обозначения этих алгебр даны по аналогии с названиями и обозначениями конечных групп типа Ли. Диаграммы Дынкина нескрученных алгебр Каца—Муди совпадают с расширенными диаграммами Дынкина простых групп Ли (рис. 2.8). На рис. 4.1 и 4.2 изображены диаграммы Дынкина 2-скрученных и 3-скрученной алгебр Каца—Муди [Кац1, с. 44—45].

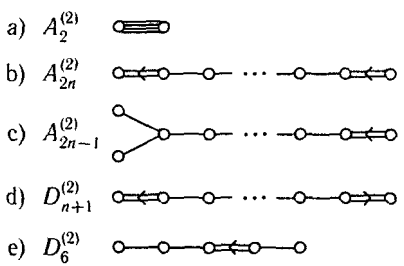


Рис. 4.1

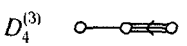


Рис. 4.2

Совпадение диаграмм Дынкина нескрученных алгебр Каца—Муди с расширенными диаграммами Дынкина простых групп Ли объясняется изоморфизмом групп Вейля этих алгебр Каца—Муди с аффинными группами Вейля простых групп Ли.

Р. Муди обозначал скрученные алгебры, диаграммы Дынкина которых изображены на рис. 4.1 и 4.2, символами $A^{(2)}$, $BC^{(2)}$, $C_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$, $F_4^{(2)}$ и $G_2^{(3)}$ соответственно [Моо, с. 229].

Кац пришел к скрученным алгебрам Каца—Муди, отправляясь от простых групп Ли, диаграммы Дынкина которых обладают двусторонней и трехсторонней симметриями. Обозначения Каца этих алгебр связаны с обозначениями этих групп Ли. Обозначения Муди этих алгебр соответствуют тем простым группам Ли, диаграммы Дынкина которых получаются из диаграмм этих алгебр удалением одной точки.

Уравнения Пфаффа

Первая статья Картана [14] о дифференциальных уравнениях в частных производных, вышедшая в 1899 г., называется «О некоторых дифференциальных выражениях и проблеме Пфаффа». Статьи Картана [15], [16], [17] 1901 г. и [18], [19] 1902 г. были посвящены интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В первой из этих статей Картан показал, что каждая такая система эквивалентна некоторой *системе уравнений Пфаффа*

$$\theta_\alpha = \sum_i a_{\alpha i}(x)\, dx_i = 0, \tag{4.2}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Например, уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{4.3}$$

являющееся одним из основных уравнений математической физики, с помощью подстановки $\frac{\partial z}{\partial x} = u$, $\frac{\partial z}{\partial y} = v$ может быть сведено к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.4}$$

— так называемой системе Коши—Римана, которой удовлетворяют вещественная и мнимая части аналитической функции $w = u + iv = f(x + iy)$ комплексного переменного $x + iy$. Эта система эквивалентна системе уравнений Пфаффа

$$\theta_1 = du - p\, dx - q\, dy = 0, \quad \theta_2 = dv + q\, dx - p\, dy = 0, \tag{4.5}$$

где $p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Целесообразность перехода от систем уравнений в частных производных к уравнениям Пфаффа состоит в том, что уравнения (4.2) инвариантны по отношению к произвольной замене как зависимых, так

и независимых переменных, в то время как в системе уравнений в частных производных выбор независимых переменных предопределен.

Уравнения Пфаффа названы по имени математика и астронома Иоганна Фридриха Пфаффа (1765—1825), рассматривавшего такие уравнения в 1814—1815 гг. Термин «уравнения Пфаффа» был введен К. Якоби, назвавшим задачу интегрирования этих уравнений «проблемой Пфаффа». Исследованиям этой проблемы были посвящены работы Феодора Деана (1815—1844), Августа Леопольда Крелле (1780—1855), Якоби, Фердинанда Георга Фробениуса (1849—1917), С. Ли и Г. Дарбу. Появившись в творчестве Картана в 1899 г., уравнения Пфаффа были предметом исследования, а затем и средством исследования во многих работах Картана на протяжении всей его жизни. Найдя в работах 1899—1902 гг. новый подход к исследованию систем этих уравнений, Картан широко пользовался им как в своих геометрических работах, так и в работах по теории групп Ли и по теоретической физике.

Система (4.2) дифференциальных уравнений Пфаффа допускает следующее геометрическое истолкование. Если считать переменные координатами точек некоторого n-мерного многообразия X^n, то дифференциалы dx_i можно рассматривать как координаты вектора dx, принадлежащего касательному линейному пространству $T_x(X^n)$ многообразия X^n в его точке x. Если система (4.2) содержит s линейно независимых уравнений, $s < n$, то она определяет в пространстве $T_x(X^n)$ линейное подпространство $\Delta^h(x)$ размерности $h = n - s$. Если ранг системы (4.2) постоянен и равен s во всем многообразии X^n, то эта система определяет подпространство $\Delta^h(x)$ пространства $T_x(X^n)$ в каждой точке x многообразия X^n.

Множество подпространств $\Delta^h(x)$ касательных пространств $T_x(X^n)$, определенных в каждой точке x многообразия X^n, называется *распределением* Δ^h.

Интегральным многообразием системы Пфаффа (4.2) называется такое гладкое подмногообразие V^k многообразия X^n, которое в каждой своей точке касается подпространства $\Delta^h(x)$, определяемого в этой точке системой (4.2). Размерность k интегрального многообразия V^k не может быть больше размерности h подпространства $\Delta^h(x)$. Система (4.2) всегда имеет одномерные интегральные многообразия — *интегральные кривые*, при отыскании которых система (4.2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Система Пфаффа (4.2) называется *вполне интегрируемой*, если она имеет интегральные многообразия V^h максимальной размерности h, причем через каждую точку многообразия X^n проходит единственное ин-

тегральное подмногообразие V^h, т. е. интегральные подмногообразия V^h вполне интегрируемой системы (4.2) образуют расслоение многообразия X^n.

Условия полной интегрируемости системы Пфаффа (4.2) были найдены Г. Фробениусом. Для того чтобы записать эти условия, следует построить *билинейные ковариантны* системы. Пусть x — точка многообразия X^n и d_1x и d_2x — два касательных вектора к этому многообразию в точке x с координатами d_1x_i и d_2x_i. Обозначим через $\theta_\alpha(d_1) = a_{i\alpha}(x)d_1x_i$ и $\theta_\alpha(d_2) = a_{i\alpha}(x)d_2x_i$ значения формы θ_α на этих векторах. Продифференцируем первое из этих выражений вдоль вектора d_2x, а второе — вдоль вектора d_1x. Тогда билинейный ковариант Фробениуса линейной дифференциальной формы θ_α является разностью этих дифференциалов:

$$d_2\theta_\alpha(d_1) - d_1\theta_\alpha(d_2) = \sum_i d_2a_{i\alpha}(x)d_1x_i - d_1a_{i\alpha}(x)d_2x_i. \tag{4.6}$$

В правой части выражения (4.6) члены, содержащие дифференциалы $d_2d_1x_i$ и $d_1d_2x_i$, взаимно уничтожаются. Картан первоначально называл левую часть выражения (4.6) *внешней производной* формы θ_α и обозначал ее θ'_α; впоследствии он стал называть это выражение *внешним дифференциалом* формы θ_α и обозначать его через $d\theta_\alpha$. Слагаемые, входящие в правую часть выражения (4.6), Картан назвал *внешним произведением* форм $da_{i\alpha}$ и dx_i. Вначале он обозначал внешнее произведение форм ω_1 и ω_2 символом $\omega_1\omega_2$, затем — символом $[\omega_1\omega_2]$; в настоящее время это произведение обозначается $\omega_1 \wedge \omega_2$ и соотношение (4.6) записывается в виде

$$d\theta_\alpha = \sum_i da_{i\alpha} \wedge dx_i. \tag{4.7}$$

На любом интегральном многообразии V^k системы (4.2) выполняются не только сами уравнения (4.2), но и уравнения

$$d\theta_\alpha = 0, \tag{4.8}$$

получающиеся внешним дифференцированием этой системы. Уравнения (4.8) в силу (4.7) могут быть записаны в виде $\sum_i \sum_j \frac{\partial a_{\alpha i}}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0$, но, так как $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, эти уравнения можно записать также в виде

$$\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial a_{\alpha i}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0. \tag{4.9}$$

Эти уравнения накладывают условия на координаты двух любых векторов d_1x и d_2x, касательных к интегральному многообразию. Если векторы d_1x и d_2x удовлетворяют уравнению (4.9), говорят, что они *находятся в инволюции* относительно системы внешних форм (4.8). Внешнее дифференцирование уравнений (4.8) приводит к тождеству, так как

$$d(d\theta_\alpha) = \sum_i \sum_j d\frac{\partial a_{\alpha i}}{\partial x_j} \wedge dx_i \wedge dx_j = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 a_{\alpha i}}{\partial x_j \partial x_k} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \equiv 0$$

в силу симметрии смешанных вторых производных. Поэтому система, состоящая из уравнений (4.2) и (4.8), замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Если система уравнений (4.2) вполне интегрируема, то интегральные многообразия этой системы имеют размерность $h = n - s$ и уравнения (4.8) не должны накладывать на координаты касательных векторов никаких новых соотношений по сравнению с уравнениями (4.2). Как нетрудно заметить, это условие может быть записано в виде

$$d\theta_\alpha = \sum_\beta \theta_\beta \wedge \theta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, s. \tag{4.10}$$

Г. Фробениус в работе 1877 г. доказал, что условие (4.10) является не только необходимым, но и достаточным условием полной интегрируемости системы (4.2).

Картан в работах [16] 1901 г. и [21, 22] 1904 г. построил теорию систем уравнений Пфаффа, не являющихся вполне интегрируемыми. Следуя Софусу Ли, применявшему термин «инволюционные системы уравнений», Картан называл систему уравнений Пфаффа (4.2) *находящейся в инволюции*, если через каждую интегральную кривую V^1 этой системы проходит по меньшей мере одно ее двумерное интегральное многообразие V^2, через каждое ее двумерное интегральное многообразие V^2 проходит по меньшей мере одно ее трехмерное интегральное многообразие V^3 и т. д., и, наконец, через всякое ее интегральное многообразие V^{p-1} проходит по меньшей мере одно ее интегральное многообразие V^p.

Картан нашел необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений (4.2) была в инволюции. Для этого он рассмотрел p-мерные элементы, состоящие из точки x многообразия X^n и из p-мерного подпространства E^p касательного пространства $T_x(X^n)$ многообразия X^n в точке x. Этот элемент он называл *интегральным элементом* и обозначал I^p, если все принадлежащие ему векторы удовлетворяют системе уравнений Пфаффа (4.2), т. е. I^p принадлежит распределению Δ^h, и если, кроме того, любые два вектора этого интегрального элемента находятся

в инволюции относительно системы уравнений (4.8). Очевидно, что если система (4.2) находится в инволюции, то через каждый ее одномерный интегральный элемент I^1 проходит двумерный интегральный элемент I^2, через него проходит трехмерный интегральный элемент I^3 и т. д., а через интегральный элемент I^{p-1} проходит хотя бы один интегральный элемент I^p. Эта последовательность вложенных друг в друга интегральных элементов $I^1, I^2, \ldots, I^p$ называется *интегральной цепью*. Интегральная цепь называется *регулярной*, если каждый ее интегральный элемент находится в общем положении, т. е. через элемент I^{k-1} проходит не больше интегральных элементов I^k, чем через любой соседний $(k-1)$-мерный интегральный элемент. Картан доказал, что необходимым и достаточным условием того, чтобы система уравнений Пфаффа (4.2) была в инволюции, является существование регулярной цепи интегральных элементов $I^1, I^2, \ldots, I^p$ для каждой точки x многообразия X^n.

При построении интегральной цепи наступает такой момент, когда не будет существовать интегрального элемента размерности $g+1$, проходящего через интегральный элемент размерности g. В этом случае система (4.2) будет находиться в инволюции для всех $p \leqslant g$, но не будет обладать этим свойством при $p > g$. Число g называется *жанром* системы (4.2).

Картан доказал теорему существования решения системы (4.2) жанра g: пусть I^p — интегральный элемент системы (4.2) размерности $p \leqslant g$ в точке x многообразия X^n, тогда при $p < g$ существует бесконечное множество p-мерных интегральных многообразий, содержащих многообразие V^{p-1} и касающихся элемента I^p в точке x_0, а при $p = g$ существует только одно такое многообразие. Доказательство этой теоремы опирается на классическую теорему Коши—Ковалевской о существовании решения системы дифференциальных уравнений в частных производных. Так как теорема Коши—Ковалевской справедлива только для аналитических функций, то теорема Картана также справедлива только в том случае, когда все коэффициенты уравнений (4.2) являются аналитическими функциями, а искомые интегральные многообразия — аналитическими многообразиями.

Теория Картана не только дает принципиальный ответ на вопрос о существовании интегральных многообразий системы (4.2), но и устанавливает арифметические критерии, при выполнении которых существуют интегральные многообразия системы (4.2) определенной размерности p $(p \leqslant g)$, а также указывает произвол существования этих многообразий.

Эти критерии были сформулированы Картаном в работе [21, 22]. Здесь, развивая понятие *характера* системы уравнений Пфаффа, вве-

денное Эдуардом фон Вебером (1879—1934) в работе «К теории инвариантов систем уравнений Пфаффа» [Web], Картан определил *характеры* системы уравнений Пфаффа и с их помощью установил необходимые и достаточные условия существования решений систем уравнений Пфаффа. Характер, определенный фон Вебером, представлял собой первый из характеров Картана. Покажем более подробно, как Картан устанавливал эти условия.

Предположим, что требуется найти p-мерные интегральные многообразия системы уравнений Пфаффа (4.2), где $p \leqslant g$. Система (4.8) ее внешних дифференциалов приводится к виду

$$\sum_i \sum_j a_{ij\alpha}\theta_i \wedge \theta_j + 2\sum_i \sum_u a_{iu\alpha}\theta_i \wedge \theta_u + \sum_u \sum_v a_{uv\alpha}\theta_u \wedge \theta_v = 0, \quad (4.11)$$

где θ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ — формы Пфаффа, независимые на интегральном многообразии V^p, а θ_u $(u = p+1, p+2, \ldots, s)$ — остальные характеристические формы системы (4.2). Пусть r_i — ранг системы линейных уравнений, получающихся из (4.11) при определении $(i+1)$-мерного интегрального элемента. Характеры s_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ системы (4.2) определяются как разности $r_i - r_{i-1}$ (при этом $s_1 + s_2 + \ldots + s_{p-1} < q = s - p$, а характер $s_p = q - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{p-1})$. Число $Q = s_1 + 2s_2 + \ldots + ps_p$, называемое в настоящее время «числом Картана», равно числу параметров, от которых зависит p-мерный интегральный элемент. Из системы (4.11) характеристические формы θ_u выражаются в виде линейных комбинаций базисных форм θ_i: $\theta_u = \sum_i b_{ui}\theta_i$. Если обозначить через N число независимых коэффициентов этих разложений, то критерий Картана инволютивности системы (4.2) состоит в равенстве $N = Q$. Если при этом последним отличным от нуля характером является s_m, то произвол решения системы (4.2) равен s_m функциям m вещественных аргументов.

Алгебра внешних форм

Мы уже упоминали о применении Картаном операции внешнего дифференцирования линейной формы и операции внешнего умножения двух таких форм. Эти операции являются частными случаями более общих операций, применявшихся Картаном не только к линейным, но и к внешним дифференциальным формам степени p

$$\omega = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}. \quad (4.12)$$

Здесь $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — тензор, кососимметрический по всем индексам, т. е. изменяющий знак при всякой нечетной перестановке его индексов и не изменяющийся при всякой четной перестановке индексов, а $\wedge$ — знак внешнего умножения, также указывающий на то, что при всякой нечетной перестановке дифференциалов форма (4.12) изменяет знак, а при всякой четной их перестановке она не изменяется. Над внешними формами определены действия внешнего умножения

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \Big(\sum_{i_1}\sum_{i_2}\ldots\sum_{i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\Big) \wedge$$
$$\wedge \Big(\sum_{j_1}\sum_{j_2}\ldots\sum_{j_q} b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}\Big) =$$
$$= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\ldots\sum_{i_p}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\ldots\sum_{j_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q} \qquad (4.13)$$

и действия внешнего дифференцирования

$$d\omega = d\Big(\sum_{i_1}\sum_{i_2}\ldots\sum_{i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\Big) =$$
$$= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\ldots\sum_{i_p} da_{i_1 i_2 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}. \qquad (4.14)$$

При этом, если ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы степени p и q, то внешний дифференциал внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$ равен

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \qquad (4.15)$$

Операции (4.13) и (4.14) над линейными дифференциальными формами применялись уже Г. Фробениусом. Мы встречались с частным случаем правила (4.14)

$$d(d\omega) = 0, \qquad (4.16)$$

по существу известным уже А. Пуанкаре; это правило часто называют *теоремой Пуанкаре*.

Внешняя дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если существует такая дифференциальная форма θ, что $\omega = d\theta$. В силу теоремы Пуанкаре всякая точная дифференциальная форма является замкнутой, хотя не всякая замкнутая дифференциальная форма является точной. Картан часто пользовался тем, что если имеет место равенство $\sum_i \theta_i \wedge \omega_i = 0$, где θ_i и ω_i — формы Пфаффа, причем

формы ω_i линейно независимы, то формы θ_i являются линейными комбинациями форм ω_i, причем коэффициенты b_{ij} этих линейных комбинаций симметричны:

$$\theta_i = \sum_j b_{ij}\omega_j, \qquad b_{ij} = b_{ji}. \tag{4.17}$$

Это утверждение в настоящее время называют *леммой Картана*.

По сложению и внешнему умножению внешние формы образуют алгебру, совпадающую с алгеброй Грассмана.

Применение теории систем в инволюции

Картан применял созданную им теорию систем уравнений Пфаффа в инволюции во многих своих исследованиях. В работе [30] 1910 г. эта теория использовалась при изучении систем двух уравнений в частных производных второго порядка в задаче, которая составила предмет исследований Э. Гурса. Картан рассмотрел здесь систему уравнений Пфаффа с 5 переменными, к которой сводятся эти уравнения, решил вопрос об эквивалентности двух таких систем относительно допустимых преобразований и дал подробную классификацию систем такого типа.

В работе [33] 1911 г. Картан изучал системы, сводящиеся к системе 4 уравнений Пфаффа. В работе [45] 1915 г. он применил теорию систем в инволюции к преобразованиям Бэклунда, с помощью которых известные решения системы дифференциальных уравнений в частных производных могут быть преобразованы в некоторые новые решения этой системы.

В статье [131] 1931 г. Картан применил эту теорию к исследованию уравнений, к которым сводятся некоторые задачи общей теории относительности.

Большая часть применений теории систем в инволюции относится к дифференциальной геометрии подмногообразий различных однородных пространств, которую мы рассмотрим в следующей главе. Теория систем в инволюции, построенная Картаном для уравнений Пфаффа, была обобщена в 1934 г. Эрихом Келером (1906—1970) на системы, состоящие не только из уравнений Пфаффа, но и из внешних дифференциальных уравнений различных порядков, в книге «Введение в теорию систем дифференциальных уравнений» [Kah2].

В 1945 г. в книге «Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения» [181] Картан дал систематическое изложение как своей теории решения уравнений Пфаффа, так и теории Келера. Следуя Келеру, Картан заменил свой первоначальный термин «внешняя производная» общепринятым в настоящее время термином «внешний

дифференциал», а первоначальное обозначение этой операции ω' общепринятым в настоящее время обозначением $d\omega$.

Оригинальному изложению теории Картана посвящены книга Петра Константиновича Рашевского (1907—1983) «Геометрическая теория уравнений в частных производных» [Раш2] и книга С. П. Финикова «Метод внешних форм Картана» [Фин].

Кратные интегралы, интегральные инварианты и интегральная геометрия

Исчисление внешних форм, созданное Картаном, оказалось очень полезным в теории кратных интегралов и в связанных с ней теории интегральных инвариантов и интегральной геометрии. Двойной интеграл $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ при замене переменных $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ преобразуется по формуле

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du\,dv, \tag{4.18}$$

где

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

— *якобиан* функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ по переменным u и v, D — область изменения переменных x и y, а D' — область изменения переменных u и v, переходящая при этом преобразовании в область D. Функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ предполагаются при этом дифференцируемыми, а якобиан $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ — отличным от нуля в области D'.

Формула (4.18) показывает, что двойной интеграл не инвариантен при замене переменных, т. е. правую часть этой формулы нельзя получить простой подстановкой в ее левую часть дифференциалов $dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv$ и $dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv$. То же относится к тройным и другим кратным интегралам. Однако выражение двойного интеграла можно сделать инвариантным, если записать его в виде

$$\iint_D f(x, y)\,dx \wedge dy, \tag{4.19}$$

т. е. если применить в его подынтегральном выражении внешнее произведение $dx \wedge dy$, так как $dx \wedge dy = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\,du \wedge dv$. Тогда формулу (4.19)

можно записать в виде

$$\iint_D f(x, y)\, dx \wedge dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du \wedge dv. \qquad (4.20)$$

Аналогично, для того чтобы поверхностный интеграл

$$\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

стал инвариантным по отношению к замене переменных, его следует записать в виде

$$\iint_S P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy, \qquad (4.21)$$

т. е. в виде интеграла от внешней формы. Интегралы (4.19) и (4.21) являются частными случаями интеграла

$$\int_{V^p} \omega = \int_{V^p} \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \qquad (4.22)$$

по p-мерному подмногообразию V^p n-мерного многообразия X^n; выражение (4.22) остается инвариантным при любом дифференцируемом преобразовании координат на многообразии X^n. Классические формулы Грина, Гаусса, Остроградского и Стокса являются частными случаями общей формулы

$$\oint_{\partial V^p} \omega = \int_{V^p} d\omega, \qquad (4.23)$$

где ∂V^p — граница подмногообразия V^p, ω — внешняя дифференциальная форма степени $p - 1$, а $d\omega$ — внешний дифференциал формы ω, являющийся внешней формой степени p на замкнутом многообразии, получаемом замыканием многообразия V^p.

В случае формулы Грина $p = 2$, V^2 — плоская область, ∂V^2 — граница этой области, форма ω имеет вид $\omega = P\, dx + Q\, dy$, а

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

В случае формулы Гаусса $p = 3$, V^3 — область трехмерного пространства, ∂V^3 — поверхность, являющаяся границей этой области, форма ω имеет вид $\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$, а

$$d\omega = \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right] dx \wedge dy \wedge dz.$$

М. В. Остроградский обобщил формулу Гаусса для случая области V^p n-мерного пространства.

В случае формулы Стокса $p = 2$, V^2 — область на двумерной поверхности, ∂V^2 — ее граница, форма ω имеет вид $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, а

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx.$$

Формулу (4.23) называют *обобщенной формулой Стокса*.

Теория интегральных инвариантов систематически изложена в 1922 г. в книге Картана «Лекции об интегральных инвариантах» [64], в которой с помощью метода внешних форм завершается построение этой теории, основанной еще Пуанкаре.

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.24}$$

где $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ — дифференцируемые функции. *Интегральным инвариантом* этой системы называется интеграл $\int_{V^p} \omega$ по подмногообразию V^p размерности $p < n$, на котором параметр t имеет постоянное значение, причем значение интеграла не меняет своей величины, когда точки подмногообразия V^p перемещаются вдоль интегральных кривых системы (4.24). Интегральный инвариант называется *абсолютным*, если свойство инвариантности имеет место для любых областей интегрирования, и *относительным*, если это свойство имеет место только для замкнутых областей.

Наиболее важны применения этой теории к механике. Основные дифференциальные уравнения механики системы могут быть записаны в форме уравнений Гамильтона

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{4.25}$$

где q_i — лагранжевы *обобщенные координаты* системы, p_i — *обобщенные импульсы*, а $H = H(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ — *функция Гамильтона*, равная сумме кинетической и потенциальной энергии системы. Относительным интегральным инвариантом этой системы является интеграл $\oint_{\partial V^p} \sum_i p_i\,dq_i$, а ее абсолютным инвариантом — интеграл $\iint_{V^p} \sum_i dp_i \wedge dq_i$, причем в силу обобщенной формулы Стокса имеет место равенство

$$\oint_{\partial V^p} \sum_i p_i\,dq_i = \iint_{V^p} \sum_i dp_i \wedge dq_i. \tag{4.26}$$

В книге Картана подробно исследуются эти и некоторые другие интегральные инварианты механики. Общая теория, развитая при этом, применяется к проблеме трех тел, к распространению света в однородной среде и к другим задачам механики и математической физики.

Еще в 1896 г. в работе «Принцип двойственности и некоторые кратные интегралы в тангенциальном и линейчатом пространствах» [10] Картан рассматривал кратные интегралы на семействах прямых линий плоскости R^2 и на семействах прямых и плоскостей пространства R^3. Эти интегралы являются интегральными инвариантами по отношению к группам движений плоскости R^2 и пространства R^3.

Таким инвариантом для однопараметрического семейства прямых, пересекающих данную замкнутую кривую, является «периметр», пропорциональный длине кривой. Картан также определил интегральный инвариант для двупараметрического семейства прямых пространства (конгруэнции прямых), обращающийся в нуль, когда конгруэнция является нормальной (конгруэнцией нормалей к поверхности). С помощью этого инварианта весьма просто доказывается теорема Этьена Малюса (1775—1812) о том, что нормальная конгруэнция прямых остается нормальной после любого числа отражений и преломлений.

Работа Картана [10] положила начало разделу геометрии, называемому в настоящее время *интегральной геометрией*. Ранее задачи такого рода относились к теории вероятностей. Таковы были задачи о бросании диска, квадратной пластинки и иглы, решавшиеся еще Жоржем Луи Бюффоном (1707—1788) в его «Опыте нравственной арифметики» [Buf], а также исследования Моргана Вильяма Крофтона (1826—1915) в работе «О теории локальной вероятности» [Cro]. Картан впервые решал задачи этого рода как чисто геометрические задачи.

Интегральная геометрия получила значительное развитие в 30-х гг. XX в. Существенную роль в этом сыграла инвариантная мера в группах Ли, применявшаяся Г. Вейлем, а затем и самим Картаном, в их исследованиях по теории простых групп Ли. С помощью этой меры можно определить инвариантные меры в многообразиях различных геометрических образов в пространствах, группами преобразований которых являются такие группы. Термин «интегральная геометрия» был введен В. Бляшке [Бл]. Многие работы Бляшке и его учеников относятся к этому разделу геометрии. Итоги многих исследований по интегральной геометрии изложены Л. А. Сантало в книге «Введение в интегральную геометрию» [Сан]. Новые направления в интегральной геометрии были основаны П. К. Рашевским в работе 1941 г. «Полиметрическая геометрия» [Раш1], Б. В. Лесовым (1916—1942) в работе

«Мера площади в двупараметрическом семействе кривых на поверхности» [Лес] и Исааком Моисеевичем Ягломом (1920—1988) в работе «Тангенциальная метрика в двупараметрическом семействе кривых на плоскости» [Яг]. И. М. Гельфанд, М. И. Граев и Наум Яковлевич Виленкин (1920—1991) в книге «Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений» [ГГВ] решили ряд задач интегральной геометрии, связанных с теорией унитарных представлений некомпактных групп Ли.

Дифференциальные формы и числа Бетти

В работе 1929 г. [118] Картан рассмотрел интегральные инварианты, являющиеся интегралами от внешних дифференциальных форм на компактных однородных пространствах, инвариантные при преобразованиях однородных пространств, и показал, как с помощью этих инвариантов вычислить топологические инварианты однородных пространств — числа Бетти.

В главе 2 мы упоминали статьи Картана [111] и [154] и работы [Пон1] и [Шев], где были вычислены числа Бетти односвязных компактных простых групп Ли.

Первоначально Картан называл топологию, т. е. геометрическую дисциплину, изучающую инварианты, сохраняющиеся при взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях, analysis situs, как ее называли Риман и Пуанкаре. Позже Картан стал применять термин «топология», общепринятый в настоящее время.

Название «analysis situs» было введено Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716), который в известном письме Х. Гюйгенсу в 1679 г. писал: «Нужен еще иной, чисто геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm), как алгебра выражает величину». Слова Лейбница разные математики понимали по-разному: Эйлер понимал под «геометрией положения» — топологию, фон Штаудт и другие геометры XIX в. называли так проективную геометрию, Грассман, создавая векторную алгебру, также ссылался на письмо Лейбница Гюйгенсу. Слово «топология», буквально «наука о местах», является греческим переводом латинских слов «analysis situs». Это название было предложено учеником Гаусса Иоганном Бенедиктом Листингом (1808—1882) в 1847 г. в работе [Лис], оно стало общепринятым только в XX в.

Бернгард Риман (1826—1866) в «Теории абелевых функций» [Ри1] рассматривал многолистные поверхности, изображающие многозначные функции комплексного переменного, которые определяются алгебраи-

ческими уравнениями $F(x, y) = 0$. В настоящее время эти поверхности называются «римановыми поверхностями». Риман подразделял такие поверхности на «односвязные», разбиваемые на две части любой замкнутой кривой и «многосвязные», которые превращаются разрезами, не разбивающими поверхность на две части, в «односвязные», и ставил в соответствие каждой замкнутой двусторонней поверхности «число связности», определяемое числом разрезов, которые следует произвести, чтобы превратить поверхность в «односвязную». В случае замкнутых двусторонних поверхностей это число разрезов всегда четное и, если обозначить его $2p$, то число связности равно $2p + 1$. В случае сферы $p = 0$, для тора $p = 1$, для «сферы с p ручками» это число равно p. Для римановых поверхностей, определяемых уравнениями $F(x, y) = 0$, в настоящее время число p называется родом плоской алгебраической кривой с уравнением $F(x, y) = 0$. Для многогранников с N_0 вершинами, N_1 ребрами и N_2 гранями число p связано с *эйлеровой характеристикой* $\chi = N_0 - N_1 + N_2$ соотношением $\chi = 2 - 2p$.

Во «Фрагментах, относящихся к analysis situs» [Ри3], опубликованных посмертно, Риман предложил многомерные обобщения чисел связности. Эти обобщения, называемые «порядками связности», были описаны другом Римана Энрико Бетти (1823—1892) в работе «О пространствах произвольного числа измерений» [Bet]. Бетти определил порядки связности m-го рода в различных размерностях.

Теория, намеченная Риманом и Бетти, была подробно изложена Пуанкаре в работе «Analysis situs» [Пуа3]. В этой работе Пуанкаре ввел понятие *гомеоморфизма* многообразий, являющихся линиями или поверхностями и многомерного аффинного пространства, и «числа Бетти» этих многообразий, т. е. порядки связности Бетти.

Пуанкаре определял эти числа следующим образом: всякому p-мерному многообразию V^p он ставил в соответствие $(p - 1)$-мерное многообразие ∂V^p, являющееся границей многообразия V^p, и называл многообразие V^p *гомологичным нулю*, если оно само является границей $(p + 1)$-мерного многообразия V^{p+1}, $V^p = \partial V^{p+1}$. В этом случае граница V^p равна нулю. Различая положительную и отрицательную ориентации многообразий, Пуанкаре определял умножение многообразий на целые числа, причем умножение на -1 означало изменение ориентации. Пуанкаре определял также сумму многообразий, их линейные комбинации с целыми коэффициентами и линейную независимость этих линейных комбинаций. Если на многообразии V^p число линейно независимых замкнутых m-мерных многообразий равно $p_m - 1$, то порядок связности Бетти многообразия V^p по отношению к m-мерным

многообразиям равен p_m. Таким образом Пуанкаре определил «числа Бетти» $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Пуанкаре определил также коммутативные группы, являющиеся факторгруппами групп всех замкнутых линейных комбинаций m-мерных подмногообразий данного многообразия по подгруппам этих групп, состоящим из линейных комбинаций, гомологичных нулю. Замкнутые линейные комбинации подмногообразий в настоящее время называются *циклами*. Определенные Пуанкаре факторгруппы являются прямыми суммами некоторого числа свободных циклических групп $\mathbb{Z}$, изоморфных группе целых чисел по сложению, и нескольких конечных циклических групп $\mathbb{Z}_i$. Пуанкаре доказал, что числа свободных циклических прямых слагаемых определенных им групп равны $p_m - 1$. Числа элементов конечных циклических прямых слагаемых этих групп называются «коэффициентами кручения». По причине тесной связи групп, определенных Пуанкаре, с числами Бетти Пуанкаре назвал их «группами Бетти».

В настоящее время группами Бетти называются части этих групп, состоящие из бесконечных циклических прямых слагаемых; части групп, определенных Пуанкаре, состоящие из конечных циклических прямых слагаемых, называются *группами кручения*, а сами группы, определенные Пуанкаре, называются *группами гомологий*.

Числами Бетти в настоящее время называются числа прямых слагаемых групп Бетти. К этим числам теперь добавляют числа p_0 и p_n; они, так же как и «числа Бетти» Пуанкаре, обозначаются p_m. Для сферы $p_0 = p_2 = 1$, $p_1 = 0$; для тора $p_0 = p_2 = 1$, $p_1 = 2$, для сферы с p ручками $p_0 = p_2 = 1$, $p_1 = 2p$. В этих случаях эйлерова характеристика $\chi = p_0 - p_1 + p_2$ равна соответственно 2, 0 и $2 - 2p$.

Примером многообразия, обладающего кручением, является вещественная проективная плоскость P^2. В этом случае $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = 0$, а группа гомологий для $m = 1$ является циклической группой $\mathbb{Z}_2$, т. е. в этом случае коэффициент кручения равен 2.

В работе [118] Картан, развивая идею Пуанкаре о важности для топологии интегралов от полных дифференциалов, показал, что числа Бетти компактных топологических пространств можно вычислить как числа линейно независимых интегралов от точных дифференциальных форм. На этом основано вычисление чисел Бетти компактных простых групп Ли. Сущность установленной Картаном связи интегралов от дифференциальных форм с числами Бетти была выяснена Жоржем де Рамом (1903—1990) в работе «Об analysis situs многообразий n измерений» [Rh]. Де Рам установил аналогию между многообразиями V^p с границами $V^{p-1} = \partial V^p$ и дифференциальными формами ω_p степени p

с внешними дифференциалами $\omega_{p+1} = d\omega_p$. В этой аналогии замкнутые многообразия ($\partial V^p = 0$) соответствуют замкнутым формам ($d\omega_p = 0$), а многообразия, гомологичные нулю ($V^p = \partial V^{p+1}$), соответствуют точным формам ($\omega_p = d\omega_{p-1}$).

По аналогии с группами гомологий де Рам определил факторгруппы групп замкнутых дифференциальных форм степени p по их подгруппам, состоящим из точных дифференциальных форм, называемые *группами когомологий*, и установил связь этих групп с группами гомологий Пуанкаре.

Новые методы в теории дифференциальных уравнений в частных производных

Теория дифференциальных уравнений в частных производных, которая в начале XX в. развивалась в различных направлениях Вессио и Картаном, получила новое развитие в последние десятилетия этого века благодаря синтезу методов этих двух направлений и некоторых других методов современной математики.

Из новых методов прежде всего отметим метод гомологической алгебры, в значительной степени выросший из работ Картана по теории гомологий компактных простых групп Ли и симметрических пространств. Здесь следует упомянуть работы Х. Л. Гольдшмидта «Теоремы существования для аналитических дифференциальных уравнений в частных производных» [Gls1], «Критерии интегрируемости для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных» [Gls2], «О структуре уравнений Ли» [Gls3], работы Д. К. Спенсера «Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных» [Spe1] и «Деформация структур многообразий, определенная транзитивными непрерывными псевдогруппами» [Spe2].

Систематическому изложению новых методов в теории дифференциальных уравнений в частных производных, являющихся развитием методов Э. Картана, посвящены книги «Внешние дифференциальные системы» Р. Л. Брайанта, Ш. Чжэня, Р. Б. Гарднера, Х. Л. Гольдшмидта и П. А. Гриффитса [Bry] и «Системы уравнений в частных производных и псевдогруппы Ли» Ж. Ф. Поммаре [Pom].

Глава 5

Метод подвижного репера и дифференциальная геометрия

Подвижные триэдры Френе и Дарбу

Многочисленные работы Картана и его учеников по дифференциальной геометрии основаны на применении метода подвижного репера. Этот метод связан с развитыми Картаном теорией групп Ли и теорией систем уравнений Пфаффа в инволюции.

Картан указывал, что метод подвижного репера он заимствовал у Г. Дарбу, который применял его в своих классических «Лекциях по общей теории поверхностей» [Da] под названием метода подвижного триэдра. Впервые этот метод был применен Мартином Бартельсом (1769—1836), профессором Дерптского университета, известного тем, что в молодости он был учителем юного Гаусса, а впоследствии, будучи профессором Казанского университета, был учителем Лобачевского. М. Бартельс, связывая с каждой точкой пространственной кривой триэдр, который мы в настоящее время называем «триэдром Френе», получил формулы, равносильные формулам Френе, опубликованные учеником Бартельса Карлом Эдуардом Зенфом (1810—1849) в книге «Главные теоремы теории кривых и поверхностей» [Snf] в Дерпте в 1831 г. со ссылкой на то, что эти формулы были получены Бартельсом. Подвижный триэдр применялся и другим учеником Бартельса Петром Ивановичем Котельниковым, отцом А. П. Котельникова, в «Изложении аналитических формул, которыми определяется возмущение вращательного движения Земли» [Kot] 1832 г.

Формулы Френе появились позже в работах Жозефа Серре (1819—1885) «О некоторых формулах, относящихся к теории кривых двоякой кривизны» [Srt] в 1851 г. и в статье Жана Фредерика Френе (1816—1900) «О некоторых свойствах кривых двоякой кривизны» [Frn] в 1852 г.; диссертация Френе с этими формулами появилась в 1847 г.

Оси триэдра Френе направлены по касательной к кривой, по ее главной нормали — прямой, ортогональной к касательной и лежащей в со-

прикасающейся плоскости кривой, и по бинормали — перпендикуляру к соприкасающейся плоскости кривой. Если обозначить единичные векторы, направленные по этим осям, через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, то формулы Френе можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = k\boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -k\boldsymbol{e}_1 + \varkappa\boldsymbol{e}_3, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{e}_2, \tag{5.1}$$

где s — длина дуги кривой, k — *кривизна* кривой, а $\varkappa$ — *кручение* кривой. Отметим, что Френе нашел только шесть координатных формул, равносильных двум первым формулам (5.1), а Серре нашел все девять формул, равносильных всем формулам (5.1).

Формулы Френе были обобщены на пространство R^n Камилем Жорданом в работе «О теории кривых в пространстве n измерений» [Jo2] в 1874 г. С каждой точкой кривой пространства R^n Жордан связывал n-эдр, оси которого направлены по касательной к кривой, по прямой, лежащей в соприкасающейся двумерной плоскости кривой и ортогональной к касательной, ..., по прямой, лежащей в $(i+1)$-мерной соприкасающейся плоскости кривой и ортогональной к i-мерной соприкасающейся плоскости, ... и по нормали к соприкасающейся гиперплоскости кривой. Если обозначить единичные векторы, направленные по этим осям, через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то обобщенные формулы Френе можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = k_1\boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_3, \quad \ldots, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_i}{ds} = -k_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1} + k_i\boldsymbol{e}_{i+1}, \quad \ldots, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_n}{ds} = -k_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1},\end{gathered} \tag{5.2}$$

где s — длина дуги кривой, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — *кривизны* кривой. Подвижный триэдр был применен к теории поверхностей пространства R^3 впервые Альбером Рибокуром (1845—1893) в его «Исследовании эласоидов, или поверхностей нулевой средней кривизны» [Rib] в 1884 г. Рибокур называл «эласоидами» поверхности, которые в настоящее время называются минимальными.

Систематически метод подвижного триэдра применялся к теории поверхностей пространства R^3 Дарбу в книге [Da]. При изучении линий на поверхностях Дарбу рассматривал триэдры, векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ которых направлены по касательной к кривой и по нормали к поверхности, а при изучении самих поверхностей он рассматривал триэдры, векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ которых направлены по касательным к линиям кривизны поверхности, т. е. по двум главным направлениям поверхности, а вектор $\boldsymbol{e}_3$ направлен по нормали к поверхности. Дарбу рассматривал производные векторов

первого репера по длине дуги линий на поверхности. Эти производные имеют вид

$$\frac{de_1}{ds} = k_n e_2 - k_g e_3, \quad \frac{de_2}{ds} = -k_n e_1 + \varkappa_g e_3, \quad \frac{de_3}{ds} = k_g e_1 - \varkappa_g e_2, \qquad (5.3)$$

где k_g — *геодезическая кривизна* линий (в случае $k_g = 0$ линия является геодезической линией), k_n — *нормальная кривизна* поверхности, $\varkappa_g$ — *геодезическое кручение* линии на поверхности.

Во втором случае Дарбу рассматривал частные производные векторов репера по длинам дуг линий кривизны; коэффициенты разложения этих производных по векторам триэдра являются *главными кривизнами* поверхности, геодезическими кривизнами и кручениями ее линий кривизны.

Подвижные тетраэдры и пентасферы Демулена

Метод подвижного репера был обобщен на пространства, отличные от евклидова, бельгийским геометром Альфонсом Демуленом (1869—1947) в работах «О применении подвижного тетраэдра отнесения в кэлиевой геометрии» [Dem1] 1904 г. и «Принципы внутренней аналлагматической и линейчатой геометрии» [Dem2] 1905 г. В первой из них Демулен рассматривал неевклидовы геометрии. Фактически он изучал только эллиптическое пространство S^3, но указал, что та же теория имеет место для гиперболического пространства H^3.

С каждой точкой кривой или поверхности пространства S^3 Демулен связывал тетраэдр, автополярный относительно абсолюта этого пространства. В случае кривой Демулен совмещал одну из вершин тетраэдра с точкой кривой и направлял ребра тетраэдра, выходящие из этой вершины, по касательной к кривой, по ее главной нормали и по ее бинормали. В случае поверхности Демулен совмещал одну из вершин тетраэдра с точкой поверхности и направлял ребра тетраэдра, выходящие из этой вершины, по касательным к линиям кривизны поверхности и по нормали к ней. Демулен рассматривал производные координат вершин подвижного тетраэдра кривой по длине дуги кривой и частные производные координат вершин подвижного тетраэдра поверхности по длинам дуг ее линий кривизны и получил формулы, аналогичные формулам Френе и Дарбу.

Во второй работе Демулен рассматривал конформное пространство C^3 и связывал с каждой точкой кривой или поверхности этого пространства подвижную *пентасферу* — пять взаимно ортогональных сфер. В главе 2 мы упоминали интерпретацию пространства C^n в пространстве H^{n+1}. В этой интерпретации пространство C^n изображается абсолютом пространства H^{n+1}, а точки пространства P^{n+1}, не лежащие

на абсолюте пространства H^{n+1}, изображают гиперсферы вещественного или мнимого радиуса пространства C^n, причем ортогональные гиперсферы пространства C^n изображаются точками пространства P^{n+1}, полярно сопряженными относительно абсолюта пространства H^{n+1}. Под пятью ортогональными сферами пентасферы Демулен имел в виду сферы пространства C^3, изображаемые вершинами симплекса пространства P^4, автополярного относительно абсолюта пространства H^4. Однако на самом деле две из этих пяти сфер являются сферами нулевого радиуса и изображаются точками абсолюта пространства H^4, а остальные три сферы изображаются точками плоскости, по которой пересекаются гиперплоскости, касательные к абсолюту в первых двух точках.

Демулен рассматривал также многообразие прямых проективного пространства P^3 и связывал с каждой прямолинейной образующей линейчатой поверхности или с прямой, входящей в состав конгруэнции, шесть линейных комплексов прямых пространства P^3, попарно находящихся в инволюции. При перенесении Плюккера прямые пространства P^3 изображаются точками абсолюта пространства S_3^5, а линейные комплексы прямых пространства P^3 изображаются точками пространства P^5, причем комплексы, находящиеся в инволюции, изображаются точками, полярно сопряженными относительно абсолюта пространства S_3^5. Под шестью комплексами, попарно находящимися в инволюции, Демулен имел в виду линейные комплексы, изображаемые вершинами симплекса пространства P^5, автополярного относительно абсолюта пространства S_3^5. Однако на самом деле два из этих шести комплексов изображаются точками абсолюта пространства S_3^5 и вырождаются в комплексы, состоящие из всех прямых, пересекающих соответствующие прямые в P^5, а остальные четыре комплекса изображаются точками 3-плоскости, по которой пересекаются гиперплоскости, касательные к абсолюту пространства S_3^5.

Демулен не отмечал, что одна из пяти сфер подвижной пентасферы является точкой и что один из шести линейных комплексов вырождается и определяется одной прямой. Демулен не приводил формул, аналогичных формулам Френе и Дарбу для линий и поверхностей пространства C^3 и для линейчатых поверхностей и конгруэнции прямых пространства P^3. Вместо этих формул он приводил аналогичные формулы для автополярных симплексов эллиптических пространств S^4 и S^5, полагая, что соответственные формулы для пространств H^4 и S_3^5 можно получить по аналогии с формулами для эллиптических пространств.

В том же 1905 г. Эрнест Вильчинский (1876—1932) в «Общей проективной теории пространственных кривых» [Wil] построил теорию кривых проективного пространства P^3, применив подвижный тетраэдр этого

пространства, а Э. Вессио в работе «Минимальные кривые линии» [Ves] применил подвижный триэдр к изучению мнимых изотропных линий пространства R^3, называвшихся в то время «минимальными кривыми». Эти линии имеют нулевую длину дуги, вследствие чего обычные формулы Френе для них неприменимы.

И, наконец, в том же 1905 г. Эмиль Коттон (1972—1950) опубликовал статью «Обобщение теории подвижного триэдра» [Cot], в которой была выдвинута идея обобщения метода подвижного триэдра на произвольные пространства, обладающие группами преобразований.

Подвижные реперы Картана

Развивая идеи Г. Дарбу и Э. Коттона, Картан опубликовал в 1910 г. сначала небольшую заметку «Изотропные развертывающиеся поверхности и метод подвижного триэдра» [29], а затем статью «Структура непрерывных групп преобразований и теория подвижного триэдра» [31]. В заметке Картан применял метод подвижного триэдра к теории мнимых развертывающихся поверхностей пространства R^3, прямолинейными образующими которых являются изотропные прямые. В статье Картан связывал «метод подвижной системы отнесения», вскоре получивший название «метода подвижного репера», со структурой групп Ли и с теорией уравнений Пфаффа.

С каждым однородным пространством X^n, в котором действует группа G преобразований, Картан связывал семейство реперов R_a, обладающее тем свойством, что группа G действует на нем просто-транзитивно, т. е. всякая пара реперов определяет единственное преобразование этой группы, переводящее первый репер во второй.

В евклидовом пространстве R^n в качестве реперов могут быть выбраны системы ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{e}_i$, $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, с началами в произвольных точках $\boldsymbol{x}$ пространства R^n. Так как координаты векторов такого репера в любой системе прямоугольных координат являются элементами ортогональной матрицы, принадлежащей группе O_n, размерность которой равна $n(n-1)/2$, а начала векторов реперов определяются n координатами, то реперы $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i\}$ пространства R^n зависят от того же числа $n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$ вещественных параметров, что и группа движений пространства R^n. Аналогично выбираются реперы и в псевдоевклидовых пространствах R^n_k, но в этом случае условие ортонормирования реперов имеет вид $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = -1$, $\varepsilon_{k+1} = \ldots = \varepsilon_n = 1$. Координаты этих векторов в любой системе прямоугольных координат являются элементами псевдоортогональной матрицы, принадлежащей группе $O_{n,k}$, и реперы пространства R^n_k зависят от того

же числа $n(n+1)/2$ вещественных параметров, что и группа движений пространства R_k^n.

В аффинном пространстве E^n в качестве реперов выбираются системы линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_i$ с началами в произвольных точках $\boldsymbol{x}$ пространства. Так как координаты векторов такого репера в любой системе аффинных координат зависят от n^2 параметров, а начала векторов этих реперов определяются n координатами, реперы пространства E^n зависят от того же числа n^2+n вещественных параметров, что и группа аффинных преобразований этого пространства.

В проективном пространстве P^n, точки которого представляются векторами пространства L^{n+1}, которые Картан называл «аналитическими точками проективного пространства», в качестве реперов выбираются векторные базисы пространства L^{n+1}, состоящие из векторов $\boldsymbol{e}_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, и «единичной аналитической точки» $\boldsymbol{e}=\sum\limits_i \boldsymbol{e}_i$. Так как векторы, представляющие точки пространства P^n, определены с точностью до ненулевого вещественного множителя, реперы пространства P^n зависят от того же числа $n(n+2)$ вещественных параметров, что и группа проективных преобразований этого пространства.

Так как пространства S^n, H^n, S_k^n и H_k^n представляют собой гиперсферы пространств R^{n+1}, R_1^{n+1}, R_k^{n+1} и R_{k+1}^{n+1}, в качестве реперов пространств S^n, H^n, S_k^n, H_k^n выбираются реперы соответственно пространств R^{n+1}, R_1^{n+1}, R_k^{n+1} и R_{k+1}^{n+1} с началами векторов в центрах гиперсфер. Так как пространство S^n является метризованным пространством P^n, а пространства H^n, S_k^n и H_k^n реализуются в одной из областей, на которые пространство P^n делится абсолютами этих пространств, векторы реперов этих пространств Картан также называл «аналитическими точками». Реперами пространства S^n являются ортонормированные реперы пространства R^{n+1}, векторы каждого из этих реперов определяют вершины автополярного симплекса пространства S^n.

В качестве реперов пространства S_k^n Картан обычно рассматривал такие реперы, векторы $\boldsymbol{e}_a$ и $\boldsymbol{e}_{n-a}$ которых направлены по асимптотам гиперсферы ($a=0, 1, \ldots, k-1$), а остальные векторы $\boldsymbol{e}_i$ образуют ортонормированный репер пространства R^{n+1-2k}. Абсолюты пространств S_k^n, соответствующие этим реперам, определяются уравнениями

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2\sum_a x_a x_{n-a} + \sum_i x_i^2 = 0. \tag{5.4}$$

Векторы каждого из этих реперов определяют $2k$ точек абсолюта пространств S_k^n и вершины $(n-2k)$-мерного автополярного симплекса этого пространства.

Эти реперы зависят от того же числа $n(n+1)/2$ вещественных параметров, что и группы движений этих пространств.

Пространства C^n и C^n_k изображаются абсолютами пространств S^{n+1}_1 и S^{n+1}_{k+1}. Поэтому за реперы пространств C^n и C^n_k можно принять реперы пространств S^{n+1}_1 и S^{n+1}_{k+1}. Векторы каждого из реперов пространства C^n соответствуют 2 гиперсферам нулевого радиуса, т. е. точкам этого пространства, и n взаимно ортогональным гиперсферам вещественного радиуса, проходящим через эти точки. Векторы каждого из реперов пространства C^n_k соответствуют $2+2k$ точкам и $n-2k$ гиперсферам вещественного радиуса этого пространства.

Эти реперы зависят от того же числа $(n+1)(n+2)/2$ вещественных параметров, что и группы конформных преобразований пространств C^n и C^n_k.

Деривационные формулы

Деривационные формулы определяют переход от репера R_a рассматриваемого однородного пространства X к бесконечно близкому реперу R_{a+da}. Для того чтобы найти эти формулы, зафиксируем некоторый репер R_0 и обозначим через S_a преобразование, переводящее репер R_0 в репер R_a: $R_a = S_a R_0$. Тогда переход от репера R_a к реперу R_{a+da} определяется преобразованием $S_{a+da}S_a^{-1}$. Так как $S_a S_a^{-1}$ является тождественным преобразованием I, преобразование $S_{a+da}S_a^{-1}$ находится в окрестности преобразования I. Поэтому это преобразование можно записать в виде $S_{a+da}S_a^{-1} = I + S_\omega + o(da)$. Преобразование S_ω Картан называл инфинитезимальным преобразованием репера рассматриваемого однородного пространства. С его помощью деривационные формулы записываются в виде $dR_a = S_\omega R_a$. Теперь мы можем сказать, что преобразование S_ω принадлежит алгебре Ли $\mathbf{G}$ группы преобразований G однородного пространства X. Обозначим через ω_u $(u = 1, 2, \ldots, r)$ координаты преобразования S_ω в алгебре Ли $\mathbf{G}$. Эти координаты представляют собой инвариантные формы группы Ли G.

В аффинном пространстве E^n репер R_a состоит из точки $\boldsymbol{x}$ и векторов $\boldsymbol{e}_i$, а репер R_{a+da} — из точки $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ и векторов $\boldsymbol{e}_i + d\boldsymbol{e}_i$. Поэтому деривационные формулы в этом пространстве записываются в виде

$$d\boldsymbol{x} = \sum_i \omega_i \boldsymbol{e}_i, \qquad d\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_{ij}\boldsymbol{e}_j, \tag{5.5}$$

где ω_i и ω_{ij} — дифференциальные формы, зависящие от параметров a, определяющих положение репера, и от их дифференциалов da. Так как группа преобразований реперов пространства E^n зависит от n^2+n па-

раметров, то формы ω_i и ω_{ij}, число которых также равно $n^2 + n$, будут линейно независимыми.

В пространствах R^n и R^n_k деривационные формулы имеют тот же вид (5.5). Но формы ω_{ij} теперь не будут линейно независимыми. Дифференцируя соотношение $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, найдем, что в пространстве R^n эти формы удовлетворяют соотношению

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}. \tag{5.6}$$

Аналогично, дифференцируя соотношение $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}$, получим, что в пространстве R^n_k они связаны соотношением

$$\omega_{ij} = -\varepsilon_i\varepsilon_j\omega_{ij}. \tag{5.7}$$

Деривационные формулы для реперов $R_a = \{\boldsymbol{e}_i\}$ пространства P^n записываются в виде

$$d\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Так как векторы $\boldsymbol{e}_i$ определены с точностью до умножения на общий ненулевой множитель, то реперы можно ограничить условием равенства единице объемов параллелепипедов, построенных на этих векторах, $[\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n] = 1$, откуда получаем соотношение

$$\sum_i \omega_{ii} = 0, \tag{5.9}$$

означающее равенство нулю следа матрицы (ω_{ij}).

Деривационные формулы пространств S^n, H^n, S^n_k и H^n_k имеют вид (5.8), но теперь формы ω_{ij} связаны соотношениями (5.6) или (5.7). В том случае, когда абсолюты этих пространств определяются уравнениями (5.4), условия (5.7) записываются в виде

$$\omega_{aa} = -\omega_{n-a,n-a}, \quad \omega_{ai} = -\omega_{i,n-a}, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \tag{5.10}$$

Деривационные формулы пространств C^n и C^n_k имеют тот же вид, что и формулы для пространств S^{n+1}_1 и S^{n+1}_k.

Предположим, что в однородном пространстве X с r-мерной группой преобразований G задано гладкое семейство реперов Σ, зависящее от $\rho < r$ параметров. На этом семействе формы ω_u, определяющие инфинитезимальные перемещения реперов, будут также зависеть от ρ параметров и от их дифференциалов. Картан отмечал, что если имеется два семейства реперов Σ и Σ' такие, что $\Sigma' = S\Sigma$, где S — некоторое

преобразование группы G, то формы ω_u и ω'_u, определяющие инфинитезимальные перемещения реперов этих семейств, совпадают. И обратно, если два семейства реперов Σ и Σ' в однородном пространстве X^n зависят от одного и того же числа параметров $\rho < r$ и при подходящем взаимно однозначном соответствии между реперами этих семейств $\omega'_u = \omega_u$, то эти семейства можно совместить некоторым преобразованием группы G. Эта теорема имеет важное значение при изучении подмногообразий однородных пространств с помощью метода подвижного репера.

Уравнения структуры

Инвариантные формы ω_n группы G преобразований однородного пространства X^n удовлетворяют уравнениям структуры

$$d\omega_u = \sum_v \sum_w c_{uvw}\omega_v \wedge \omega_w, \quad u, v, w = 1, 2, \ldots, r, \tag{5.11}$$

равносильным уравнениям (2.10). Для групп преобразований однородных пространств эти уравнения структуры могут быть получены из деривационных формул (5.5) и (5.8).

Дифференцируя внешним образом уравнения (5.5) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах $\boldsymbol{e}_i$, мы получим уравнения структуры пространств E^n, R^n и R^n_k

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ik}, \quad d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk}, \tag{5.12}$$

причем в пространстве R^n формы ω_{ij} удовлетворяют соотношениям (5.6), а в пространствах R^n_k — соотношениям (5.7).

Аналогично, дифференцируя внешним образом уравнения (5.8), мы получим уравнения структуры пространств P^n, S^n, S^n_k, H^n, H^n_k, C^n и C^n_k

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk}, \tag{5.13}$$

причем в случае пространств P^n, S^n, S^n_k, H^n и H^n_k индексы $i, j, k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, а в случае пространств C^n и C^n_k индексы $i, j, k = 0, 1, \ldots, n+1$, и, кроме того, для пространства P^n формы ω_{ij} удовлетворяют соотношению (5.9), для пространства S^n удовлетворяют соотношению (5.6), для пространств H^n и H^n_k — соотношениям (5.7), для пространств S^n_k — соотношениям (5.7) или (5.10), для пространств C^n и C^n_k — соотношениям (5.10).

Уравнения структуры однородного пространства X^n являются условиями полной интегрируемости его деривационных уравнений. Отсюда

вытекает важная теорема, которой Картан пользовался во всех своих работах, в которых применялся метод подвижного репера. Если заданы формы ω_u, $u = 1, 2, \ldots, r$, зависящие от $\rho < r$ параметров и их дифференциалов и удовлетворяющие уравнениям структуры однородного пространства X, то они определяют в этом пространстве семейство реперов Σ, зависящее от ρ параметров, однозначно с точностью до преобразования S группы G. Эта теорема является обобщением теоремы об определении кривой линии пространства R^3 ее кривизной и кручением, а также теоремы О. Бонне об определении поверхности пространства R^3 ее первой и второй основными квадратичными формами. Уравнения Кодацци и Гаусса—Вейнгартена, которым удовлетворяют коэффициенты этих форм, являются следствиями уравнений структуры пространства X.

Применение метода подвижного репера

Метод подвижного репера применялся Картаном для изучения подмногообразий в различных однородных пространствах. Приведем общую схему исследования подмногообразия V^p однородного пространства X^n, указанную Картаном. С каждой точкой $\boldsymbol{x}$ многообразия V^p связывается семейство реперов $\Sigma_{\boldsymbol{x}}$, на которые накладывается единственное условие: точка $\boldsymbol{x}$ принадлежит реперам семейства. Такие реперы называются «реперами нулевого порядка». Эти реперы зависят от p главных параметров $u_1, u_2, \ldots, u_p$, от которых зависит точка $\boldsymbol{x}$ многообразия V^p, и от $r - n$ вторичных параметров, число которых равно разности размерности r группы G и размерности n пространства X^n. Полное семейство Σ реперов нулевого порядка есть расслоение, базой которого является многообразие V^p, а слоями — семейства $\Sigma_{\boldsymbol{x}}$. Число вторичных параметров можно уменьшить, если заменить реперы нулевого порядка реперами первого порядка, элементы которых определенным образом связаны с окрестностью первого порядка точки $\boldsymbol{x}$ многообразия V^p. Реперы первого порядка образуют подрасслоение $\Sigma^{(1)}$ расслоения Σ с той же базой V^p. Далее строятся семейства реперов второго, третьего и т. д. порядков, элементы которых определяются с помощью соответствующих окрестностей точки $\boldsymbol{x}$ многообразия V^p. Этот процесс называется процессом *канонизации* реперов. Имеются две возможности этого процесса.

1. В процессе канонизации мы исчерпаем все вторичные параметры и для некоторого числа k семейство реперов $\Sigma^{(k)}$ будет зависеть только от p главных параметров. Такое семейство реперов называется *каноническим*. В этом случае все дифференциальные формы, входящие в деривационные формулы, будут линейными комбинациями дифференциалов главных параметров. Коэффициенты их разложения будут инвариантами,

определяющими многообразие V^p с точностью до преобразования фундаментальной группы пространства X^n.

2. Другая возможность состоит в том, что процесс канонизации реперов остановится, не дойдя до конца, т. е. на некотором шаге будет $\Sigma^{(k+1)} = \Sigma^{(k)}$, так что не все вторичные параметры будут исчерпаны. Тогда многообразие V^p допускает некоторую группу преобразований в себя.

Например, для случая кривой на евклидовой плоскости R^2 семейство Σ реперов нулевого порядка зависит от одного главного и одного вторичного параметра — угла поворота ортонормированной пары векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ относительно точки $\boldsymbol{x}$ кривой. При переходе к семейству $\Sigma^{(1)}$ реперов первого порядка вектор $\boldsymbol{e}_1$ совмещается с касательной к кривой. Это семейство реперов будет каноническим, так как зависит только от единственного главного параметра. Построенные реперы будут реперами Френе для плоской кривой. Точно так же строится семейство канонических реперов для кривой пространства R^3. Здесь канонический репер определяется касательной и главной нормалью и является репером второго порядка. В случае кривой пространства R^n репер Френе является репером порядка $n-1$. Отличные от нуля дифференциальные формы, входящие в деривационные формулы для реперов Френе, имеют вид $\omega_{i+1,i} = -\omega_{i,i+1} = k_i\,ds$, и величины k_i образуют полную систему инвариантов, определяющих кривую в пространстве R^n с точностью до движения.

Каноническими реперами являются также реперы Дарбу для гиперповерхности в пространстве R^n, состоящие из вектора $\boldsymbol{e}_n$, направленного по нормали гиперповерхности, и векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$, направленных по ее линиям кривизны. Эти реперы являются реперами второго порядка.

Изотропные кривые

Картан отмечал, что не всегда простые геометрические соображения могут привести к построению канонического репера. Тогда это построение можно провести чисто аналитически, используя уравнения структуры пространства. Покажем, как это делается для случая изотропной кривой пространства $\mathbb{C}R^3$. Эти кривые рассматривал Э. Вессио в 1905 г. в работе [Ves], Картан изучал их в книгах [144] и [157].

Изотропной кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ в пространстве $\mathbb{C}R^3$ называется кривая, каждый касательный вектор $\boldsymbol{x}'$ которой является изотропным, т. е. имеет нулевую длину. Скалярный квадрат этого вектора $\boldsymbol{x}'^2 = 0$, откуда вытекает равенство $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') = 0$. Длина дуги такой кривой равна нулю, касательный вектор к этой кривой перпендикулярен сам себе и касательная к ней ле-

жит в ее нормальной плоскости. Поэтому для изотропной кривой нельзя построить репер Френе. Для изучения изотропной кривой Картан использовал циклические реперы в пространстве $\mathbb{C}R^3$, векторы которых удовлетворяют соотношениям

$$e_1^2 = e_3^2 = e_1 e_2 = e_2 e_3 = 0, \quad e_2^2 = e_1 e_3 = 1. \tag{5.14}$$

Из девяти форм ω_{ij}, определяющих перемещение этого репера, только три будут независимыми. Дифференцируя равенство (5.14) с помощью формул (5.5), легко найти, что эти формы связаны соотношениями

$$\omega_{31} = \omega_{13} = \omega_{22} = 0, \quad \omega_{21} + \omega_{32} = \omega_{12} + \omega_{23} = \omega_{11} + \omega_{33} = 0. \tag{5.15}$$

При построении канонического репера сэкономим один шаг, сразу присоединяя к кривой $\boldsymbol{x}(t)$ реперы первого порядка. Для этого совместим начальную точку репера с точкой $\boldsymbol{x}$ кривой, а вектор $\boldsymbol{e}_1$ — с ее изотропным касательным вектором $\boldsymbol{x}'$. Так как теперь $d\boldsymbol{x} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1$, то на кривой выполняются уравнения

$$\omega_2 = \omega_3 = 0. \tag{5.16}$$

Форма ω_1 называется *базисной*; она содержит дифференциал параметра t, определяющего положение точки $\boldsymbol{x}$ на кривой. Продифференцируем уравнения (5.16) внешним образом с помощью уравнений структуры (5.11). В силу соотношений (5.15) и (5.16) получим всего одно внешнее квадратичное уравнение $\omega_1 \wedge \omega_{21} = 0$, откуда следует, что

$$\omega_{21} = p\omega_1. \tag{5.17}$$

Форма ω_{21} будет главной, так как она обращается в нуль, если точка $\boldsymbol{x}$ становится неподвижной. При этом отличными от нуля на кривой остаются только две независимые формы — ω_{11} и ω_{12}. Они определяют допустимые перемещения реперов первого порядка. Следовательно, семейство реперов первого порядка зависит от одного главного и двух вторичных параметров.

Для дальнейшей канонизации репера продифференцируем внешним образом уравнение (5.17). Получим

$$(dp - 2p\omega_{11}) \wedge \omega_1 = 0,$$

откуда следует, что

$$dp - 2p\omega_{11} = -2q\omega_1. \tag{5.18}$$

Если зафиксировать точку $\boldsymbol{x}$ на кривой, то $\omega_1 = 0$, и уравнение (5.18) можно переписать в виде

$$\delta p - 2p\pi_{11} = 0, \tag{5.19}$$

где δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам, а π_{11} — значение формы ω_{11} при $\omega_1 = 0$.

В уравнении (5.19) следует различать два случая. Если $p = 0$ для всех точек кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, то дальнейшая канонизация невозможна, и семейство реперов второго порядка совпадает с семейством реперов первого порядка. Так как из уравнения (5.16) следует, что в этом случае $\omega_{21} = 0$, из уравнения (5.5) вытекает, что

$$d\boldsymbol{x} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1, \quad d\boldsymbol{e}_1 = \omega_{11} \boldsymbol{e}_1.$$

Отсюда следует, что в случае $p = 0$ линия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ является изотропной прямой.

Если $p \neq 0$, то уравнение (5.19) можно переписать в виде

$$\delta \ln p - 2\pi_{11} = 0.$$

Легко проверить, что $d\pi_{11} = 0$ при $\omega_1 = 0$ и поэтому вторичная форма π_{11} является полным дифференциалом: $\pi_{11} = \delta \ln \varphi$. Подставляя это значение и интегрируя предыдущее уравнение, получим, что $p = C\varphi^2$. Здесь φ — вторичный параметр, определяющий длину вектора $\boldsymbol{e}_1$. За счет выбора этого параметра величину p можно сделать равной $+1$ или -1. Остановимся на первом из этих случаев. Тогда уравнения (5.17) и (5.18) примут вид

$$\omega_{21} = \omega_1, \quad \omega_{11} = q\omega_1. \tag{5.20}$$

Эти уравнения определяют семейство реперов второго порядка, присоединенное к изотропной кривой.

Для построения реперов третьего порядка продифференцируем внешним образом второе из уравнений (5.20). Получим

$$(dq + \omega_{12}) \wedge \omega_1 = 0,$$

откуда найдем

$$dq + \omega_{12} = k\omega_1. \tag{5.21}$$

Фиксируя точку $\boldsymbol{x}$ на кривой, получим

$$\delta q + \pi_{12} = 0.$$

Здесь снова форма π_{12} является полным дифференциалом: $\pi_{12} = -d\psi$, ввиду чего

$$\delta q = \delta\psi, \quad q = \psi + C.$$

Отсюда следует, что за счет вторичного параметра ψ величина q может быть приведена к нулю. Второе уравнение (5.20) и уравнение (5.21)

теперь переписываются в виде

$$\omega_{11} = 0, \qquad \omega_{12} = k\omega_1. \tag{5.22}$$

Эти уравнения показывают, что все вторичные формы выразились через базисную форму ω_1. Следовательно, репер третьего порядка является каноническим.

Заметим, что в силу предыдущих формул $d\omega_1 = 0$. Поэтому форма ω_1 является полным дифференциалом: $\omega_1 = d\sigma$. Параметр σ называется *псевдодугой изотропной кривой* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$. Он был введен Э. Вессио в работе [Ves]. Величина k, входящая во второе уравнение (5.22), является инвариантом, который называется *псевдокривизной изотропной кривой*. В силу предыдущих соотношений формулы Френе для изотропной кривой принимают вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{d\sigma} = \boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{d\sigma} = k\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{d\sigma} = -k\boldsymbol{e}_2. \tag{5.23}$$

Две изотропные кривые будут совпадать с точностью до движения пространства $\mathbb{C}R^3$, если для обеих кривых псевдокривизна k есть одна и та же функция от псевдодуги σ.

Линейчатые поверхности

В книге [157] Картан рассматривал линейчатые поверхности пространства R^3. Отправляясь от семейства ортонормированных реперов нулевого порядка, точка $\boldsymbol{x}$ которых лежит на образующей линейчатой поверхности, а вектор $\boldsymbol{e}_1$ направлен вдоль этой образующей, Картан пришел к каноническому реперу, начало которого находится в горловой точке образующей, вектор $\boldsymbol{e}_3$ направлен вдоль общего перпендикуляра двух бесконечно близких образующих, а $\boldsymbol{e}_2$ — векторное произведение $\boldsymbol{e}_3$ на $\boldsymbol{e}_1$. Деривационные формулы для семейства канонических реперов имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma} = a\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_3, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{d\sigma} = \boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{d\sigma} = -\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_3, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{d\sigma} = -b\boldsymbol{e}_2. \tag{5.24}$$

Последние три формулы (5.24) представляют собой формулы Дарбу для кривой на сфере, описываемой концом вектора $\boldsymbol{e}_1$, образующей сферическое изображение рассматриваемой линейчатой поверхности. При этом параметр σ совпадает с длиной дуги этого сферического изображения, так как $d\sigma = |d\boldsymbol{e}_1|$, а инвариант b представляет собой геодезическую кривизну этой кривой. Инвариант k — это параметр распределения линейчатой поверхности, равный пределу отношения кратчайшего расстояния между двумя ее прямолинейными образующими к углу между ними при стремлении одной из них к другой. Этот инвариант определяется

окрестностью первого порядка образующей l, а инварианты a и b — ее окрестностью второго порядка. Если заданы три произвольные функции $k = k(\sigma)$, $a = a(\sigma)$ и $b = b(\sigma)$, то с точностью до положения в пространстве существует единственная линейчатая поверхность, для которой эти функции являются ее соответственными инвариантами. При $k = 0$ линейчатая поверхность будет развертывающейся.

Кривые на аффинной, проективной и изотропной плоскостях

В книге [157] Картан рассмотрел также теорию плоских кривых в аффинной и проективной геометрии. Картан построил дифференциальную геометрию кривых линий на плоскостях E^2 и P^2 по аналогии с теорией кривых на плоскости R^2. Формулы Френе для плоскости R^2, т. е. формулы (5.2) при $n = 2$, имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = k\boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -k\boldsymbol{e}_1.$$

Картан отмечал, что кривизна k в этих формулах связана с радиусом R круга кривизны в точке $\boldsymbol{x}$ соотношением $k = 1/R$. Круг кривизны является предельным положением круга, *проходящего через 3 точки* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(s + ds)$ и $\boldsymbol{x}_{-1} = \boldsymbol{x}(s - ds)$ при стремлении точек $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_{-1}$ к точке $\boldsymbol{x}$.

С каждой неособой точкой кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ аффинной плоскости E^2 Картан связывал коническое сечение, которое является пределом конического сечения, проходящего через 5 точек $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t + dt)$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}\left(t + dt + \frac{1}{2}d^2t\right)$, $\boldsymbol{x}_{-1} = \boldsymbol{x}(t - dt)$ и $\boldsymbol{x}_{-2} = \boldsymbol{x}\left(t - dt - \frac{1}{2}d^2t\right)$ при стремлении точек $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_{-1}$ и $\boldsymbol{x}_{-2}$ к точке $\boldsymbol{x}$. Диаметр этого конического сечения, проходящий через точку $\boldsymbol{x}$, Картан называл *аффинной нормалью* кривой в точке $\boldsymbol{x}$. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ канонического репера направлен по касательной к кривой, вектор $\boldsymbol{e}_2$ — по ее аффинной нормали.

Деривационные формулы имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{d\sigma} = \boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{d\sigma} = k\boldsymbol{e}_1, \tag{5.25}$$

где σ — *аффинная длина дуги*, k — *аффинная кривизна* кривой. В случае, когда $k = 0$, коническое сечение является параболой, когда $k < 0$, оно является эллипсом, когда $k > 0$ — гиперболой.

Картан показал, что аффинную нормаль можно определить также как касательную в точке $\boldsymbol{x}$ к линии, являющейся геометрическим местом середин хорд кривой, параллельных касательной к ней в точке $\boldsymbol{x}$.

Кривыми постоянной аффинной кривизны являются конические сечения.

С каждой неособой точкой кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ проективной плоскости P^2 Картан связывал коническое сечение, которое является пределом конического сечения, проходящего через 5 точек $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t + dt)$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}\left(t + dt + \frac{1}{2}d^2t\right)$, $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}\left(t + dt + \frac{1}{2}d^2t + \frac{1}{3!}d^3t\right)$ и $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}\left(t + dt + \frac{1}{2}d^2t + \frac{1}{3!}d^3t + \frac{1}{4!}d^4t\right)$ при стремлении точек $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ и $\boldsymbol{x}_4$ к точке $\boldsymbol{x}$. Точка $\boldsymbol{e}_1$ канонического репера расположена на касательной к кривой в точке $\boldsymbol{x}$, точка $\boldsymbol{e}_2$ этого репера расположена на поляре точки $\boldsymbol{e}_1$ относительно построенного конического сечения. Картан называл эту поляру *проективной нормалью* кривой в точке $\boldsymbol{x}$. Под точками $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ Картан имел в виду аналитические точки.

Деривационные формулы канонического репера, в котором точку $\boldsymbol{x}$ мы будем обозначать $\boldsymbol{e}_0$, имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{e}_0}{d\sigma} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{d\sigma} = -k\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{d\sigma} = -\boldsymbol{e}_0 - k\boldsymbol{e}_1, \tag{5.26}$$

где σ — *проективная длина дуги*, k — *проективная кривизна* кривой.

Проективную нормаль можно также определить как касательную в точке $\boldsymbol{e}_0$ к линии, являющейся геометрическим местом четвертых гармонических точек для точки $\boldsymbol{e}_1$ и точек пересечения всех прямых, проходящих через точку $\boldsymbol{e}_1$, с кривой.

Кривыми постоянной проективной кривизны являются конические сечения.

В работе [147a] Картан рассмотрел теорию плоских кривых на изотропной плоскости I^2. В этой работе Картан связывал с каждой точкой $\boldsymbol{x}$ кривой на плоскости I^2 репер, состоящий из единичного касательного вектора $\boldsymbol{e}_1$ и из единичного вектора $\boldsymbol{e}_2$, направленного по изотропной прямой этой плоскости, и вывел формулы Френе в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = k\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = 0.$$

Кривыми постоянной кривизны на изотропной плоскости являются *циклы*, имеющие вид парабол, диаметры которых — изотропные прямые плоскости I^2.

Многомерные поверхности в евклидовом пространстве

В книге «Риманова геометрия в ортогональном репере» [108a] Картан рассматривал некоторые вопросы теории p-мерных поверхностей V^p

в n-мерных римановых пространствах V^n и, в частности, в евклидовом пространстве R^n. Рассмотрим более подробно эту теорию.

Свяжем с каждой точкой $\boldsymbol{x}$ p-мерной поверхности V^p пространства R^n семейство ортонормированных реперов, векторы $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ которых лежат в плоскости $T_{\boldsymbol{x}}(V^p)$, касательной к поверхности V^p, а векторы $\boldsymbol{e}_u$ $(u = p + 1, \ldots, n)$ — в его нормальной плоскости $N_{\boldsymbol{x}}(V^p)$. Тогда поверхность V^p определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_u = 0,$$

а формы ω_i линейно независимы на поверхности V^p. Квадрат линейного элемента поверхности V^p имеет вид $ds^2 = \sum\limits_i \omega_i^2$, эту форму называют *первой квадратичной* формой поверхности V^p.

Дифференцируя внешним образом уравнения $\omega_u = 0$ с помощью уравнений структуры (5.12), получим

$$d\omega_u = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ui} = 0. \tag{5.27}$$

Отсюда, применяя лемму Картана, найдем

$$\omega_{ui} = \sum_j b_{uij}\omega_j, \qquad b_{uij} = b_{uji}. \tag{5.28}$$

Коэффициенты b_{uij} являются координатами векторов $\boldsymbol{b}_{ij} = \sum\limits_u b_{uij}\boldsymbol{e}_u$. Из деривационных формул (5.25) следует, что на поверхности V^p

$$d\boldsymbol{x} = \sum_i \omega_i \boldsymbol{e}_i, \qquad d^2\boldsymbol{x} = \sum_i \Big(d\omega_i + \sum_j \omega_j\omega_{ij}\Big)\boldsymbol{e}_i + \sum_u \sum_i \omega_i\omega_{ui}\boldsymbol{e}_u. \tag{5.29}$$

Поэтому квадратичные формы

$$\varphi_u = \sum_i \omega_i\omega_{ui} = \sum_i \sum_j b_{uij}\omega_i\omega_j \tag{5.30}$$

определяют отклонение поверхности V^p от ее касательной плоскости $T_{\boldsymbol{x}}(V^p)$.

Квадратичную форму $\varphi = \sum\limits_u \varphi_u \boldsymbol{e}_u = \sum\limits_i \sum\limits_j \boldsymbol{b}_{ij}\omega_i\omega_j$ называют *второй квадратичной формой* поверхности V^p.

Рассмотрим на поверхности V^p кривую $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, на которой в качестве параметра выбрана длина дуги s. Вектор $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{a} = \sum\limits_i a_i\boldsymbol{e}_i$ будет ее единичным касательным вектором. Так как $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds}$, в силу (5.29) для этой

кривой получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{a}}{ds} = \sum_i \Big(\frac{da_i}{ds} + \sum_j a_j \frac{\omega_j}{ds}\Big)\boldsymbol{e}_i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{b}_{ij} a_i a_j. \tag{5.31}$$

Вектор $\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}$ является *вектором кривизны* кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$. Формула (5.31) дает его разложение на тангенциальную и нормальную составляющие. Поэтому *вектор нормальной кривизны* этой кривой записывается в виде

$$\boldsymbol{k}_n = \sum_i \sum_j \boldsymbol{b}_{ij} a_i a_j. \tag{5.32}$$

Отсюда видно, что вектор $\boldsymbol{k}_n$ зависит только от направления касательной к кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$.

Линейная оболочка множества векторов $\boldsymbol{k}_n$ совпадает с линейной оболочкой системы нормальных векторов $\boldsymbol{b}_{ij}$ и определяет *главную нормаль* $N_x(V^p)$ поверхности V^p. Ее размерность $p_1 < \min\{n-p,\ p(p+1)/2\}$. Прямая сумма главной нормали и касательной плоскости $T_x(V^p)$ называется *первой соприкасающейся плоскостью* $T'_x(V^p)$ поверхности V^p в точке $\boldsymbol{x}$, ее размерность $\dim T'_x(V^p) = p + p_1$.

Если $p_1 \geqslant p$, то при изменении касательного вектора $\boldsymbol{a}$ в плоскости $T_x(V^p)$ конец вектора $\boldsymbol{k}_n$ описывает в главной нормали $N^1_x(V^p)$ $(p-1)$-мерную алгебраическую поверхность, которая называется *индикатрисой кривизны*. При $p_1 < p$ конец этого вектора описывает замкнутую область в плоскости $N_x(V^p)$; эта область называется *областью кривизны*. В общем случае индикатрисы кривизны p-мерных поверхностей являются *веронезеанами* и *квазиверонезеанами*.

В качестве примера, следуя Картану, рассмотрим двумерную поверхность V^2 в пространстве R^n. В этом случае $p_1 \leqslant 3$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 \cos t + \boldsymbol{e}_2 \sin t$ и формула (5.32) принимает вид

$$\boldsymbol{k}_n = \boldsymbol{b}_{11}\cos^2 t + 2\boldsymbol{b}_{12}\cos t \sin t + \boldsymbol{b}_{22}\sin^2 t =$$
$$= \frac{\boldsymbol{b}_{11} + \boldsymbol{b}_{22}}{2} + \boldsymbol{b}_{12}\sin 2t + \frac{\boldsymbol{b}_{11} - \boldsymbol{b}_{22}}{2}\cos 2t. \tag{5.33}$$

Отсюда видно, что если p_1 равняется 2 или 3, то конец вектора $\boldsymbol{k}_n$ описывает в главной нормали $N^1_x(V^2)$ *эллипс*, центр которого определяется вектором $(\boldsymbol{b}_{11} + \boldsymbol{b}_{22})/2$, а векторы $\boldsymbol{b}_{12}$ и $(\boldsymbol{b}_{11} - \boldsymbol{b}_{22})/2$ направлены по двум его сопряженным диаметрам. Этот эллипс Картан называл *эллипсом кривизны* поверхности V^2. Если $p_1 = 1$, то конец вектора $\boldsymbol{k}_n$ описывает на одномерной главной нормали $N^1_x(V^2)$ отрезок, называемый *отрезком кривизны*. Концы этого отрезка соответствуют главным направлениям поверхности V^2.

Поверхность V^p размерности p в пространстве R^n определяется с произволом в $n-p$ функций p вещественных переменных. За эти функции в общем случае можно принять функции, выражающие координаты x_u точки $\boldsymbol{x}$ этой поверхности через координаты x_i, принимаемые за независимые переменные.

Проиллюстрируем применение критерия Картана при исследовании системы уравнений Пфаффа $\omega_u = 0$, определяющей поверхность V^p в пространстве R^n. Характер s_1 этой системы равен числу независимых квадратичных уравнений (5.27), полученных внешним дифференцированием системы уравнений $\omega_u = 0$, ввиду чего $s_1 = n - p$. Ранги r_i систем линейных уравнений, определяющих $(i+1)$-мерные интегральные элементы, равны $r_i = i(n-p)$. Поэтому все остальные характеры $s_i = r_i - r_{i-1}$ также равны $n-p$. Сумма характеров $s_1 + s_2 + \ldots + s_p = q$ равна числу $p(n-p)$ независимых форм ω_{ui}. Число Картана равно

$$Q = s_1 + 2s_2 + \ldots + ps_p = (1 + 2 + \ldots + p)(n-p) = \frac{p(p+1)(n-p)}{2}.$$

Число Q совпадает с числом N независимых коэффициентов b_{uij}. Так как $Q = N$, то в силу критерия Картана система (5.27) находится в инволюции и произвол ее решения равен $s_p = n - p$ функций p вещественных переменных, что соответствует указанному выше произволу существования поверхности V^p общего вида в пространстве R^n.

Минимальные поверхности

В книге [108а] Картан рассматривал *минимальные поверхности* V^2 в евклидовом пространстве R^4; условие минимальности состоит в требовании равенства нулю вариации площади поверхности. Это условие записывается в виде $\delta \int \omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Из этого условия вытекает, что вектор $(\boldsymbol{b}_{11} + \boldsymbol{b}_{22})/2$ равен 0, т. е. центр эллипса кривизны минимальной поверхности совпадает с ее точкой $\boldsymbol{x}$.

Для поверхности V^p пространства R^n вектор $\boldsymbol{b} = \frac{1}{p}\sum_i \boldsymbol{b}_{ii}$ был назван Энрико Бомпиани (1889—1975), одним из основателей многомерной дифференциальной геометрии, *вектором средней кривизны*. При $p > 2$ равенство $\boldsymbol{b} = 0$ также характеризует минимальные поверхности V^p.

Однако минимальные поверхности V^2 пространства R^4 замечательны еще и тем, что они обладают комплексной структурой, что не имеет места для минимальных поверхностей V^p при $p > 2$: всякую гладкую минимальную поверхность V^2 в пространстве R^4 можно рассматривать как вещественную реализацию аналитической кривой γ на комплексной эрмитовой евклидовой плоскости $\mathbb{C}\bar{R}^2$.

Обобщая это свойство минимальных поверхностей V^2 в пространстве R^4, мы придем к понятию *сильно минимальных поверхностей* V^{2p} в евклидовом пространстве R^{2n}; для этого рассмотрим комплексное эрмитово евклидово пространство $\mathbb{C}\bar{R}^n$, изометричное пространству R^{2n}, и аналитическую поверхность Γ^p в пространстве $\mathbb{C}\bar{R}^n$. За векторы $\boldsymbol{e}_{2k-1}$ репера пространства R^{2n} примем векторы $\boldsymbol{E}_k$ унитарно ортонормированного репера пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$, а за векторы $\boldsymbol{e}_{2k}$ репера пространства R^{2n} — произведения $\boldsymbol{E}_k i$. Тогда дифференциальные формы ω_{nl}, входящие в уравнения движения репера в пространстве R^{2n}, помимо условий $\omega_{lk} = -\omega_{kl}$, будут связаны также условием

$$\omega_{2l-1,2k-1} = \omega_{2l,2k}, \quad \omega_{2l-1,2k} = -\omega_{2l,2k-1} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.34}$$

Заметим, что число соотношений (5.34), напоминающих условия Коши—Римана (4.4), равно разности $n(2n+1) - n(n+2)$ размерностей групп движений пространств R^{2n} и $\mathbb{C}\bar{R}^n$.

С каждой точкой поверхности V^{2p} пространства R^{2n}, являющейся реализацией аналитической поверхности Γ^p пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$, свяжем ортонормированный репер, состоящий из векторов $\boldsymbol{e}_{2l-1}$, $\boldsymbol{e}_{2l}$ $(l=1, 2, \ldots, p)$, лежащих в касательной плоскости $T_x(V^{2p})$, и из векторов $\boldsymbol{e}_{2u-1}$, $\boldsymbol{e}_{2u}$ $(u = p+1, \ldots, n)$, лежащих в нормальной плоскости $N_x(V^{2p})$. Тогда поверхность V^{2p} определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_{2u-1} = \omega_{2u} = 0. \tag{5.35}$$

Дифференцируя уравнение (5.35) внешним образом, получим

$$\begin{gathered}\sum_i (\omega_{2i-1} \wedge \omega_{2u-1,2i-1} + \omega_{2i} \wedge \omega_{2u-1,2i}) = 0,\\ \sum_i (\omega_{2i-1} \wedge \omega_{2u,2i-1} + \omega_{2i} \wedge \omega_{2u,2i}) = 0.\end{gathered} \tag{5.36}$$

Так как формы ω_{2i-1} и ω_{2i} линейно независимы на поверхности V^{2p}, то, применяя лемму Картана, найдем

$$\begin{aligned}\omega_{2u-1,2i-1} &= \sum_j (b_{2u-1,2i-1,2j-1}\omega_{2j-1} + b_{2u-1,2i-1,2j}\omega_{2j}),\\ \omega_{2u-1,2i} &= \sum_j (b_{2u-1,2i,2j-1}\omega_{2j-1} + b_{2u-1,2i,2j}\omega_{2j}),\\ \omega_{2u,2i-1} &= \sum_j (b_{2u,2i-1,2j-1}\omega_{2j-1} + b_{2u,2i-1,2j}\omega_{2j}),\\ \omega_{2u,2i} &= \sum_j (b_{2u,2i,2j-1}\omega_{2j-1} + b_{2u,2i,2j}\omega_{2j}),\end{aligned} \tag{5.37}$$

где $b_{uij} = b_{uji}$. В силу условий (5.34) найдем еще следующие соотношения между коэффициентами b_{uij}:

$$\begin{aligned} b_{2u-1,2i-1,2j-1} = b_{2u-1,2j-1,2i-1} = b_{2u,2i,2j-1} = b_{2u,2j-1,2i} = \\ = -b_{2u-1,2i,2j} = -b_{2u-1,2j,2i}, \\ b_{2u,2i,2j} = b_{2u,2j,2i} = b_{2u-1,2i-1,2j} = b_{2u-1,2j,2i-1} = \\ = -b_{2u,2i-1,2j-1} = -b_{2u,2j-1,2i-1}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Из этих соотношений вытекает, в частности, что

$$\sum_i (b_{2u-1,2i-1,2i-1} + b_{2u-1,2i,2i}) = \sum_i (b_{2u,2i-1,2i-1} + b_{2u,2i,2i}), \tag{5.39}$$

т. е. вектор средней кривизны сильно минимальной поверхности равен нулю, как и у всякой минимальной поверхности.

Аналитическая поверхность Γ^p в пространстве $\mathbb{C}\bar{R}^n$ определяется $n-p$ аналитическими функциями p комплексных переменных. Но чтобы задать каждую из этих функций, достаточно задать две вещественные аналитические функции от p вещественных переменных. Поэтому сильно минимальная поверхность V^{2p} евклидова пространства R^{2n} существует с произволом в $2(n-p)$ функций p вещественных переменных. Этот результат можно получить также с помощью применения критерия Картана к системе уравнений Пфаффа (5.35). Характер s_1 этой системы равен числу линейно независимых внешних квадратичных уравнений (5.36), т. е. $s_1 = 2(n-p)$. Ранги r_i систем линейных уравнений, определяющих $(i+1)$-мерные интегральные элементы, равны $r_i = 2i(n-p)$, ввиду чего остальные характеры $s_i = r_i - r_{i-1}$ также равны $s = 2(n-p)$. Сумма характеров $s_1 + s_2 + \ldots + s_p = q$ равна числу $2p(n-p)$ независимых форм $\omega_{2u-1,2i-1}$ и $\omega_{2u,2i-1}$. Число Картана

$$Q = s_1 + 2s_2 + \ldots + ps_p = \frac{p(p+1)(n-p)}{2}$$

совпадает с числом N независимых коэффициентов b_{uij}. Так как $Q = N$, то система уравнений Пфаффа (5.35) находится в инволюции и произвол решения этой системы, т. е. произвол существования сильно минимальной поверхности V^{2p} в пространстве R^{2n}, равен $s_p = 2(n-p)$ функциям p вещественных переменных.

Изотропные поверхности

Работа Картана «Изотропные поверхности гиперквадрики в пространстве 7 измерений» [177], опубликованная впервые авторами этой книги в 1995 г. с комментариями [АР], посвящена дифференциальной

геометрии двумерных *изотропных поверхностей* на абсолюте псевдоэллиптического пространства S_4^7. Этот абсолют можно рассматривать как псевдоконформное пространство C_3^6.

Изотропными поверхностями Картан называл такие двумерные поверхности на абсолюте пространства S_4^7, что все касательные плоскости к ним являются плоскими образующими абсолюта. Поэтому через каждую из этих двумерных плоскостей проходит одна трехмерная плоская образующая абсолюта первого и второго семейства.

Название «изотропные поверхности» объясняется тем, что в псевдоевклидовом пространстве R_3^6, дополнением которого бесконечно удаленной и идеальными точками является пространство C_3^6, эти поверхности представляют собой изотропные поверхности псевдоевклидова пространства, т. е. длины дуг всех линий на этих поверхностях равны нулю.

В случае абсолюта пространства S_4^7 формула (5.4) принимает вид

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_0x_7 + x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4 = 0. \tag{5.40}$$

С каждой точкой изотропной поверхности Картан связывал репер, состоящий из аналитических точек $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_7$, причем $(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j) = 1$, если $i + j = 7$, и $(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j) = 0$ во всех остальных случаях. Отсюда следует, что все точки $\boldsymbol{A}_i$ лежат на гиперквадрике (5.40) и все прямые $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_{7-i}$ взаимно полярно сопряжены относительно этой гиперквадрики. Репер выбирается так, что его точка $\boldsymbol{A}_0$ совпадает с данной точкой изотропной поверхности, точки $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ лежат на касательной плоскости к поверхности в точке $\boldsymbol{A}_0$, точки $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$ лежат в трехмерных плоских образующих разных семейств гиперквадрики, проходящих через касательную плоскость, точки $\boldsymbol{A}_5$ и $\boldsymbol{A}_6$ лежат в касательной гиперплоскости к гиперквадрике в точке $\boldsymbol{A}_0$. Точка $\boldsymbol{A}_7$ лежит вне касательной гиперплоскости в точке $\boldsymbol{A}_0$.

Дифференцируя соотношения $(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j) = 1$, Картан получил уравнения

$$\omega_{7-j,i} + \omega_{7-i,j} = 0. \tag{5.41}$$

В пространстве S_4^7, как и в пространстве S^7, имеет место *принцип тройственности*, открытый Картаном в работе [82]. Подобно Э. А. Вейссу, который в работе [Wes] интерпретировал принцип тройственности пространства S_4^7 с помощью биоктонионов нулевого модуля, Картан в работе [177] интерпретировал принцип тройственности пространства S_4^7 с помощью антиоктонионов нулевого модуля. В обеих этих интерпретациях точки и трехмерные плоские образующие абсолютов семимерных пространств изображаются элементами нулевого модуля алгебр $\mathbb{CO}$ и $\mathbb{O}'$, причем если точки абсолютов изображаются элементами A алгебр $\mathbb{CO}$ и $\mathbb{O}'$, то трехмерные плоские образующие этих

абсолютов, принадлежащие к одному семейству, определяются уравнениями $AB = 0$, а трехмерные плоские образующие этих абсолютов, принадлежащие к другому семейству, определяются уравнениями $CA = 0$, где B и C — элементы тех же алгебр. Поэтому если рассматривать аналитические точки $\boldsymbol{A}_i$ как элементы алгебры $\mathbb{O}'$, то трехмерная плоская образующая $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ определяется антиоктонионом B_0, удовлетворяющим условиям

$$\boldsymbol{A}_0B_0 = \boldsymbol{A}_1B_0 = \boldsymbol{A}_2B_0 = \boldsymbol{A}_3B_0 = 0,$$

а трехмерная плоская образующая $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4$ определяется антиоктонионом C_0, удовлетворяющим условиям

$$C_0\boldsymbol{A}_0 = C_0\boldsymbol{A}_1 = C_0\boldsymbol{A}_2 = C_0\boldsymbol{A}_4 = 0.$$

Две трехмерные плоские образующие абсолюта пространства S_4^7, принадлежащие к разным семействам и представляемые элементами B и C алгебры $\mathbb{O}'$, пересекаются в точке, представляемой элементом $\bar{A}$, в случае, когда $BC = A$, и пересекаются по двумерной плоскости в случае, когда $BC = 0$. Две точки абсолюта, представляемые элементами A_1 и A_2, лежат на одной прямолинейной образующей в случае, когда $A_1\bar{A}_2 + A_2\bar{A}_1 = 0$. Две трехмерные плоские образующие абсолюта, принадлежащие к одному семейству и представляемые элементами B_1 и B_2 или C_1 и C_2, пересекаются по прямолинейной образующей в случае, когда $B_1\bar{B}_2 + B_2\bar{B}_1 = 0$ или $C_1\bar{C}_2 + C_2\bar{C}_1 = 0$.

Уравнения Пфаффа изотропной поверхности имеют вид

$$\omega_{30} = \omega_{40} = \omega_{50} = \omega_{60} = \omega_{70} = 0. \tag{5.42}$$

Дифференцируя первые 4 из этих уравнений внешним образом, Картан получил уравнения

$$d\omega_{30} = \omega_{10} \wedge \omega_{31} + \omega_{20} \wedge \omega_{32} = 0, \tag{5.43}$$

$$d\omega_{40} = \omega_{10} \wedge \omega_{41} + \omega_{20} \wedge \omega_{42} = 0, \tag{5.44}$$

$$d\omega_{50} = \omega_{10} \wedge \omega_{51} = 0, \tag{5.45}$$

$$d\omega_{60} = \omega_{20} \wedge \omega_{62} = 0. \tag{5.46}$$

Так как в силу уравнений (5.41) $\omega_{51} = \omega_{62}$, из уравнений (5.45) и (5.46) следует, что

$$\omega_{51} = \omega_{62} = 0. \tag{5.47}$$

Дифференцируя уравнение (5.47) внешним образом, мы получим соотношения

$$d\omega_{51} = \omega_{31} \wedge \omega_{53} + \omega_{41} \wedge \omega_{54} = 0, \qquad d\omega_{62} = \omega_{32} \wedge \omega_{63} + \omega_{42} \wedge \omega_{64} = 0,$$

которые в силу соотношений (5.41) приводятся к виду

$$\omega_{31} \wedge \omega_{42} + \omega_{41} \wedge \omega_{32} = 0. \tag{5.48}$$

Поэтому замкнутая система дифференциальных уравнений, определяющая изотропную поверхность V^2 пространства C_3^6, состоит из уравнений Пфаффа (5.42) и (5.47) и из квадратичных соотношений (5.43), (5.44) и (5.48). Исследование этой системы с помощью критерия Картана показывает, что так как в квадратичные соотношения входят новые формы ω_{31}, ω_{32}, ω_{41}, ω_{42}, т. е. их число $q = 4$, а число независимых квадратичных соотношений $s_1 = 3$, то второй характер Картана $s_2 = q - s_1 = 1$, число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 5$. Применяя лемму Картана к соотношениям (5.43) и (5.44), Картан получал равенства

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= a\omega_{10} + b\omega_{20}, \qquad & \omega_{32} &= b\omega_{10} + c\omega_{20}, \\ \omega_{41} &= a'\omega_{10} + b'\omega_{20}, \qquad & \omega_{42} &= b'\omega_{10} + c'\omega_{20}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Подставляя разложения (5.49) в уравнение (5.48), Картан получил соотношение

$$ac' + ca' - 2bb' = 0. \tag{5.50}$$

Поэтому произвол наиболее общего интегрального элемента изотропной поверхности V^2 равен $N = 6 - 1 = 5$. Так как $N = Q$, система уравнений Пфаффа (5.42) и (5.47), определяющая поверхность V^2, находится в инволюции, и так как $s_2 = 1$, произвол решения этой системы, т. е. произвол существования изотропной поверхности V^2 пространства C_3^6, равен одной функции двух вещественных переменных.

Так как дифференциал аналитической точки $\boldsymbol{A}_0$, касательный к поверхности V^2, равен $d\boldsymbol{A}_0 = \omega_{00}\boldsymbol{A}_0 + \omega_{10}\boldsymbol{A}_1 + \omega_{20}\boldsymbol{A}_2$, то второй дифференциал этой точки по модулю касательной плоскости к поверхности V^2 равен $d^2\boldsymbol{A}_0 = \sum\limits_i \sum\limits_u \omega_{i0}\omega_{ui}\boldsymbol{A}_u$, $i = 1, 2$, $u = 3, 4, \ldots, 7$, но в силу уравнений (5.42) и (5.47), мы имеем по модулю касательной плоскости

$$d^2\boldsymbol{A}_0 = \sum_i \omega_{i0}\omega_{3i}\boldsymbol{A}_3 + \sum_i \omega_{i0}\omega_{4i}\boldsymbol{A}_4. \tag{5.51}$$

Отсюда следует, что соприкасающаяся плоскость $T^2_{\boldsymbol{A}_0}(V^2)$ изотропной поверхности V^2 определяется точками $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ и, следовательно, четырехмерна, в то время как в общем случае соприкасающаяся плоскость поверхности V^2 в пространстве P^n, $n > 5$, пятимерна. Соприкасающаяся плоскость изотропной поверхности V^2 совпадает с четырехмерной плоскостью, содержащей две трехмерные плоские образующие абсолюта

пространства S_4^7, проходящие через касательную плоскость к поверхности V^2.

Коэффициенты при точках $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$ в выражении (5.51) являются квадратичными формами $\Phi_3 = \sum\limits_i \omega_{i0}\omega_{3i}$ и $\Phi_4 = \sum\limits_i \omega_{i0}\omega_{4i}$. Подставляя в эти выражения соотношение (5.49), мы получим выражения этих форм в виде

$$\Phi_3 = a\omega_{10}^2 + 2b\omega_{10}\omega_{20} + c\omega_{20}^2, \qquad \Phi_4 = a'\omega_{10}^2 + 2b'\omega_{10}\omega_{20} + c'\omega_{20}^2. \quad (5.52)$$

Формы (5.52) определяют на изотропной поверхности V^2 сети $\Phi_3 = 0$ и $\Phi_4 = 0$, называемые сетями (I) и (II). В том общем случае, когда уравнения $\Phi_3 = 0$ и $\Phi_4 = 0$ не имеют общих корней и пары точек, определяемые этими уравнениями на прямой $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$, не имеют общих точек, Картан определял на поверхности V^2 сеть (III), «гармоническую по отношению к сетям (I) и (II)», т. е. определяющую на прямой $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ пару точек, которые гармонически делят обе пары точек этой прямой, определяемые сетями (I) и (II). Формы Φ_3 и Φ_4 можно одновременно привести к алгебраическим суммам квадратов, в которых $b = b' = 0$, $a = c = a' = -c' = 1$. В настоящее время сеть (III) называется *сопряженной сетью* поверхности V^2. В этом случае

$$\omega_{31} = \omega_{10}, \quad \omega_{32} = \omega_{20}, \quad \omega_{41} = \omega_{10}, \quad \omega_{42} = -\omega_{20} \qquad (5.53)$$

и формы (5.52) принимают вид

$$\Phi_3 = \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2, \qquad \Phi_4 = \omega_{10}^2 - \omega_{20}^2. \qquad (5.54)$$

Касательные к каждому семейству линий сети (III) образуют двупараметрическое семейство прямых линий. В общем случае двупараметрическое семейство прямых в пространстве P^n при $n \geqslant 5$ обладает тем свойством, что предельные положения трехмерных плоскостей, проходящих через прямую линию семейства и бесконечно близкую к ней прямую семейства, при стремлении второй прямой к первой принадлежат некоторой пятимерной плоскости. Однако в данном случае предельные трехмерные плоскости, определяемые прямыми двупараметрического семейства, не порождают пятимерную плоскость, а совпадают между собой. Поэтому окрестности прямых линий этих семейств обладают структурой, подобной структуре окрестности прямой линии в конгруэнции прямых пространства P^3, и на каждой прямой такого семейства имеются два *фокуса* — точки пересечения этой прямой с бесконечно близкими прямыми семейства. Эти бесконечно близкие прямые являются прямолинейными образующими развертывающихся поверхностей этого семейства,

и через каждую прямую семейства проходят две такие развертывающиеся поверхности. Двупараметрические семейства, обладающие этим свойством, называются *фокальными семействами*. Один из фокусов на каждой прямой этого семейства совпадает с точкой $\boldsymbol{A}_0$. Поместим точки $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ во вторые фокусы касательных к линиям соответственно первого и второго семейства, и выберем точки $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ таким образом, что точки $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4$ и $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 - \boldsymbol{A}_4$ порождают предельные трехмерные плоскости, определяемые прямыми соответственно первого и второго семейства. Фокусы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ порождают поверхности $'V^2$ и $''V^2$, получаемые из изотропной поверхности V^2 *преобразованиями Лапласа*. Эти поверхности также находятся на абсолюте пространства S_4^7, но не являются изотропными. Поэтому их можно рассматривать как неизотропные поверхности пространства C_3^6. Картан ввел на поверхности V^2 систему криволинейных координат u, v, координатными линиями которой являются линии сети (III), причем $du = \omega_{10}$, $dv = \omega_{20}$, и таким образом построил канонический репер.

Картан рассматривал также классы изотропных поверхностей. В случае, когда фокусы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ порождают не поверхности, а линии, Картан выразил все точки $\boldsymbol{A}_i$ как функции аналитических точек $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, зависящих соответственно только от переменных u и v. Эти выражения для точек канонического репера имеют вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{U}', \quad \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{V}', \\ \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{U}'', \quad \boldsymbol{A}_3 - \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{V}'', \\ \boldsymbol{A}_5 = \boldsymbol{U}'''/2, \quad \boldsymbol{A}_6 = -\boldsymbol{V}'''/2, \quad \boldsymbol{A}_7 = \boldsymbol{U}^{(\mathrm{iv})}/2 = -\boldsymbol{V}^{(\mathrm{iv})}/2.\end{gathered} \tag{5.55}$$

Построив канонические реперы, Картан нашел полную систему инвариантов, определяющую изотропную поверхность V^2 на абсолюте пространства S_4^7 с точностью до движения этого пространства, т. е. с точностью до конформного преобразования пространства C_3^6.

Изгибание многомерных поверхностей. Многомерные поверхности в проективном пространстве

Ряд работ Картана посвящен изгибанию многомерных поверхностей в различных однородных пространствах.

Первой из этих работ была статья «Деформация гиперповерхностей в вещественном евклидовом пространстве n измерений» [47]. В силу известной теоремы Рихарда Беэца (1827—1902), в общем случае гиперповерхности пространства R^n при $n > 3$ неизгибаемы, т. е. всякие две изометричные гиперповерхности можно совместить движением простран-

ства. В работе Картана рассматриваются случаи, когда гиперповерхности пространства R^n при $n > 3$ изгибаемы.

В статье «Деформация гиперповерхностей вещественного конформного пространства $n \geqslant 5$ измерений» [48] Картан решил аналогичную задачу для пространства C^n.

В том же 1916 г., когда вышла статья Картана [47], Г. Фубини ввел понятие *проективной наложимости* поверхностей. Это понятие было применено Картаном в 1920 г. в статье «О проективной деформации поверхностей» [54].

В докладе «Об общей проблеме деформации» [55] Картан определил также проективное изгибание прямолинейных конгруэнций и комплексов в пространстве P^3 и заметил, что с помощью перенесений Плюккера эта задача сводится к задаче конформного изгибания двумерных и трехмерных поверхностей пространства C_2^4.

В статье «О многообразиях постоянной кривизны евклидова или неевклидова пространства» [51, 52] Картан рассмотрел задачу изгибания поверхностей пространств R^n, S^n и H^n.

При изучении изгибания поверхностей в пространствах R^n, S^n и H^n выяснилось, что в этой теории большое значение имеют проективные свойства поверхностей, т. е. свойства, сохраняющиеся при проективных преобразованиях пространства. Поэтому в главе IV работы [51, 52] Картан рассматривал p-мерные поверхности V^p пространства P^n.

С каждой точкой поверхности V^p пространства P^n Картан связывал подвижный репер, точка $\boldsymbol{e}_0$ которого совпадает с точкой $\boldsymbol{x}$ поверхности, точки $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, находятся в касательной плоскости $T_{\boldsymbol{x}}(V^p)$, а точки $\boldsymbol{e}_u$, $u = p + 1, \ldots, n$, находятся вне этой плоскости. Если мы обозначим формы Пфаффа ω_{k0} в деривационных формулах (5.8) через ω_k, то уравнения Пфаффа, определяющие поверхность V^p в пространстве P^n, будут иметь тот же вид $\omega_u = 0$, что и в пространстве R^n, их внешние дифференциалы будут иметь вид (5.27) и, применяя лемму Картана, мы получим соотношения (5.28). Картан называл формы (5.30) *асимптотическими формами* поверхности V^p. Пучок этих форм, т. е. совокупность их линейных комбинаций, обладает проективной инвариантностью и не зависит от метрических свойств поверхности V^p. Аналогично, первая соприкасающаяся плоскость $T_{\boldsymbol{x}}^1(V^p)$, определенная для поверхностей V^p в евклидовом пространстве R^n, также проективно инвариантна. Если поместить точки $\boldsymbol{e}_i$, $i = p+1, \ldots, p+p_1$, на эту соприкасающуюся плоскость, то асимптотические формы φ_{p+i} станут линейно независимыми, а формы φ_λ, $\lambda > p + p_1$, тождественно обратятся в нуль. Затем Картан определял асимптотические и сопряженные направления на поверхности V^p.

Подобным же образом Картан определил соприкасающиеся плоскости $T_x^k(V^p)$, $k > 1$, и пучки асимптотических дифференциальных форм высших порядков и установил связи между ними. Далее возникает задача о проективной классификации многомерных поверхностей по типу их пучков асимптотических дифференциальных форм того или иного порядка.

В качестве первого примера Картан рассмотрел поверхности, на которых асимптотические формы первого порядка приводятся к виду

$$\varphi_{p+i} = \omega_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \qquad \varphi_\lambda = 0, \quad \lambda > 2p.$$

В настоящее время такие поверхности называются *многообразиями Картана*. На этих поверхностях имеется сопряженная сеть, а их соприкасающиеся плоскости $T_x^1(V^p)$ имеют размерность $2p$. Картан исследовал систему уравнений Пфаффа, определяющую такие поверхности, и доказал, что они существуют с произволом $s_2 = p(p-1)$ функций двух вещественных переменных.

Картан рассматривал также тангенциально вырожденные поверхности V^p, касательные плоскости $T_x(V^p)$ которых зависят от $q < p$ параметров. Число q называется *рангом* тангенциально вырожденной поверхности. Асимптотические квадратичные формы такой поверхности выражаются через q линейно независимых форм ω_a и имеют вид

$$\varphi_u = \sum_a \sum_b b_{uab}\omega_a\omega_b, \quad a, b = 1, 2, \ldots, q.$$

Впоследствии было доказано, что тангенциально вырожденная поверхность расслаивается на q-параметрическое семейство $(p-q)$-мерных плоскостей, вдоль каждой из которых касательная плоскость $T_x(V^p)$ остается постоянной.

Картан рассмотрел два класса тангенциально вырожденных поверхностей. Для первого из них асимптотические формы приводятся к виду

$$\varphi_{p+a} = \omega_a^2, \quad a = 1, 2, \ldots, q; \quad \varphi = 0, \quad \lambda > p + q.$$

При $q > 1$ такие поверхности зависят от $s_2 = q(q-1)$ функций двух вещественных переменных. При $q = 1$ эти поверхности являются огибающими однопараметрического семейства p-мерных плоскостей и зависят от $s_1 = n - 1$ функций одного вещественного переменного.

Второй класс характеризуется тем, что среди форм φ_u имеется максимально возможное число $q(q+1)/2$ линейно независимых форм. В этом случае при $q > 1$ поверхность V^p представляет собой конус с $(p-q-1)$-мерной вершиной и с $(p-q)$-мерными плоскими образующими.

Эти результаты Картана получили дальнейшее развитие в работах многих геометров. М. А. Акивис в статье [Ак3] и Вячеслав Тимофеевич Базылев (1919—1989) в статье [Баз] рассмотрели поверхности V^p пространства P^n, все асимптотические квадратичные формы которых одновременно приводятся к сумме квадратов. Такие поверхности, так же как и многообразия Картана, обладают сопряженной сетью, но их соприкасающиеся плоскости $T^1_x(V^p)$ имеют размерность, не превосходящую $2p$. Для таких поверхностей находятся условия голономности их сопряженной сети (для многообразия Картана эта сеть всегда голономна), а также условия принадлежности поверхности V^p соприкасающейся плоскости $T^1_x(V^p)$.

Поверхности V^p пространства P^n, обладающие сопряженными системами с многомерными компонентами, рассматривались Валерием Витальевичем Рыжковым (1920—1995) в работе [Ры1] и М. А. Акивисом в работе [Ак6].

Детальному изучению тангенциально вырожденных поверхностей посвящены работы [Ак2] и [Ак5] М. А. Акивиса, [Са57] и [Са60] С. И. Савельева и [Ры2] В. В. Рыжкова. В частности М. А. Акивис изучил строение фокальных образов $(p-q)$-мерной плоской образующей тангенциально вырожденной поверхности размерности p и ранга q, а в работе [Ак9] он показал, что с фокальными свойствами тангенциально вырожденных поверхностей связано строение регулярных сильно параболических поверхностей в евклидовом и неевклидовых пространствах.

Юло Гориевич Лумисте (р. 1929) в работе [Лу] доказал, что в общем случае n-мерные поверхности с асимптотическими полями p-мерных направлений обладают $(n-p)$-параметрическим семейством p-мерных плоских образующих. В работе [Лу] рассматриваются также поверхности с полной системой асимптотических направлений, оценивается размерность их соприкасающихся плоскостей и описывается их строение.

Филипп А. Гриффитс (р. 1938) и Джозеф Харрис (р. 1951) в работе «Алгебраическая геометрия и локальная дифференциальная геометрия» [GrH] изучали определенные Картаном пучки асимптотических дифференциальных форм поверхностей V^p методами алгебраической геометрии. Главной целью этой работы является изучение поверхностей, проективная структура которых не является общей, в частности тангенциально вырожденных поверхностей, поверхностей с вырожденными формами Чжэня и с вырожденными многообразиями бисекант. Это исследование позволяет изучить не только локальное, но и глобальное строение рассматриваемых поверхностей.

Новый шаг в вопросе о проективной классификации многомерных поверхностей сделан М. А. Акивисом в докладе [Ак10]. Пусть $PN^1_x(V^p) = T^1_x(V^p)/T_x(V^p)$ — «проективная нормаль» поверхности V^p, представляющая собой проективное пространство размерности $p_1 - 1$, а $PT_x(V^p)$ — проективизация ее касательной плоскости. Рассмотрим отображение $b\colon PT_x(V^p) \to PN^1_x(V^p)$, определяемое формулой $y_u = \sum_i \sum_j b_{uij} x_i x_j$. Это преобразование можно представить в виде произведения преобразований $b = \beta \circ \nu$, где $\nu\colon T_x(V^p) \to P^m$, $m = p(p+1)/2 - 1$, является отображением Веронезе $z_{ij} = x_i x_j$, а $\beta\colon P^m \to PN^1_x(V^p)$ — линейное преобразование $y_u = \sum_i \sum_j b_{uij} z_{ij}$. Произвольные проективные преобразования пространства $PT_x(V^p)$ индуцируют проективные преобразования пространства P^m, переводящие в себя веронезеану W, определяемую параметрическими уравнениями $z_{ij} = x_i x_j$, а также алгебраические поверхности W_k, уравнения которых представляют собой равенства ранга матрицы (z_{ij}) числам $k = 2, 3, \ldots, p-1$. Эти поверхности образуют фильтрацию $f\colon W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{p-1} \subset P^m$. Отображение β обладает ядром $K = \ker \beta$, являющимся подпространством пространства P^m размерности $m - p_1 - 1$. Точкам, принадлежащим пересечению $K \cap W_1$, соответствуют асимптотические направления поверхности V^p, а точкам, принадлежащим пересечению $K \cap W_2$ — пары сопряженных направлений. Проективная структура пучка асимптотических квадратичных форм, а следовательно, и поверхности V^p, определяется положением ядра K относительно фильтрации f в пространстве P^m. Подобное построение можно провести также для соприкасающихся плоскостей и пучков асимптотических дифференциальных форм более высоких порядков.

М. А. Половцева в диссертации [Пол] применила этот метод для исследования и классификации трехмерных поверхностей V^3 пространства P^n. Для поверхности V^3 размерность соприкасающейся плоскости $T^1_x(V^3)$ равна $3 + p_1$, где $p_1 \leqslant 6$. Так как случаи $p_1 = 1, 2$ изучались достаточно подробно раньше, то в работе [Пол] рассматриваются только случаи $p_1 = 3, 4, 5, 6$. При $p_1 = 5$ пучки асимптотических квадратичных форм для всех поверхностей V^3 принадлежат одному классу. Поэтому проективная классификация поверхностей V^3 в этом случае определяется строением пучка кубических асимптотических форм, принадлежащего окрестности третьего порядка точки поверхности V^3. В случаях, когда $p = 5, 4, 3$, имеются соответственно 3, 8 и 15 классов пучков асимптотических квадратичных форм. Каждый из этих классов определяет проективно инвариантный класс поверхностей V^3. Для каждого из этих

классов изучается геометрическое строение поверхностей V^3, указывается наличие на них сопряженных пар и асимптотических направлений и оценивается размерность соприкасающихся плоскостей порядка выше первого. Для случая $n = 3 + p$ доказывается теорема существования поверхностей, принадлежащих каждому из указанных классов, и находится произвол их существования.

Современное состояние проективно-дифференциальной геометрии и конформно-дифференциальной геометрии подмногообразий изложено в книгах Акивиса и Гольдберга [AG1], [AG2], [AG4].

Инвариантное оснащение поверхностей

Задача о построении канонического репера, которую Картан решал во многих своих работах, непосредственно связана с задачей об инвариантном оснащении поверхностей однородных пространств.

Если V^p — поверхность n-мерного евклидова или неевклидова пространства, ее инвариантным оснащением является семейство нормалей к этой поверхности, определяемое геометрией объемлющего пространства. Нормали $N_x(V^p)$ поверхности V^p вполне ортогональны ее касательным плоскостям $T_x(V^p)$ и определяются окрестностью первого порядка точки x поверхности V^p. Инвариантное оснащение индуцирует на поверхности V^p внутреннюю геометрию — метрику, геодезические линии, гауссову кривизну и т. д. Все эти свойства поверхности V^p не зависят от выбора на ней системы криволинейных координат и от выбора системы координат на нормалях $N_x(V^p)$.

При изучении поверхностей в аффинном, проективном, конформном и некоторых других пространствах с более широкой группой преобразований не удается определить инвариантное оснащение поверхности, оставаясь в пределах окрестностей первого порядка ее точек. Впервые вопрос о построении инвариантного оснащения возник в аффинно-дифференциальной геометрии. Оказалось, что для поверхности V^2 в пространстве E^3 инвариантная нормаль — прямая, проходящая через точку x и не лежащая в плоскости $T_x(V^2)$, — определяется только с помощью окрестности третьего порядка. Эта нормаль была впервые построена В. Бляшке в 1917 г.

Еще более сложно обстоит дело в проективно-дифференциальной геометрии. Задача о построении инвариантных нормалей поверхностей V^2 в пространстве P^3 решалась Э. Вильчинским в 1909 г., Г. Фубини и Э. Чехом в 1927 г. и С. П. Финиковым в 1937 г., однако в их работах построение инвариантного оснащения связывалось с выбором на поверхности той или иной системы координат. Инвариантное оснащение поверхности V^2 в пространстве P^3, не зависящее от системы координат на поверхности,

было построено Александром Петровичем Норденом (1904—1993) в книге [Нор3]. А. П. Норден с каждой точкой поверхности V^2 пространства P^3 связывал две прямые — первую нормаль, определяемую так же, как в аффинном пространстве, и вторую нормаль, лежащую в плоскости $T_x(V^2)$ и не проходящую через точку x.

Инвариантное оснащение поверхности V^2 в конформном пространстве C^3 определяется семейством касательных к ней сфер S_x и нормальных окружностей K_x, проходящих через точку x поверхности. В этом случае построение инвариантного оснащения поверхности связано с дифференциальной окрестностью второго порядка точки x. Это построение было предложено В. Бляшке в 1924 г. и А. П. Норденом в 1948 г.

В 1953 г. Герман Федорович Лаптев (1909—1972) в статье [Лап3] разработал «метод продолжений и охватов» — общий метод дифференциально-геометрических исследований многообразий, погруженных в однородные пространства или в пространства со связностями. Этот метод основан на теории представлений групп Ли и на методе подвижного репера Картана. Основная идея Г. Ф. Лаптева состоит в том, что при дифференциальных продолжениях системы уравнений, определяющих изучаемую поверхность V^p в пространстве X^n, строится последовательность геометрических объектов, которая охватывает всю информацию о дифференциальной геометрии поверхности V^p и служит основой для всех связанных с ней геометрических построений, и, в частности, для построения ее инвариантного оснащения, которое не требует фиксации на поверхности какой-либо системы координат, что и определяет его инвариантность.

Рассмотрим в качестве примера применение метода Лаптева при изучении геометрии гиперповерхности V^{n-1} в аффинном пространстве E^n. Если поместить начало векторов подвижного репера в точку x гиперповерхности, а векторы e_i этого репера, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, расположить в касательной гиперплоскости $T_x(V_{n-1})$, то уравнение Пфаффа гиперповерхности будет иметь вид $\omega_n = 0$.

Трижды продолжая это уравнение, т. е. трижды дифференцируя его внешним образом с помощью уравнений структуры (5.11), и применяя лемму Картана, мы получим

$$\begin{gathered}
\omega_{ni} = \sum_j \lambda_{ji}\omega_j, \\
\nabla\lambda_{ij} + \lambda_{ij}\omega_{nn} = \sum_k \lambda_{ijk}\omega_k, \\
\nabla\lambda_{ijk} + \lambda_{ijk}\omega_{nn} - 3\sum_n \lambda_{(ij}\lambda_{k)h}\omega_{hn} = \sum_h \lambda_{ijkh}\omega_h,
\end{gathered} \tag{5.56}$$

где оператор ∇ имеет вид

$$\nabla\lambda_{ij} = d\lambda_{ij} - \sum_k \lambda_{ik}\omega_{kj} - \sum_k \lambda_{kj}\omega_{ik},$$

а величины λ_{ij}, λ_{ijk}, λ_{ijkh} симметричны по всем своим индексам. Эти величины и образуют указанную выше фундаментальную последовательность геометрических объектов. Круглые скобки здесь и далее означают симметрирование по m индексам, находящимся между этими скобками, с последующим делением на $m!$.

Если мы зафиксируем точку $\boldsymbol{x}$ на гиперповерхности V^{n-1}, то получим

$$\omega_i = 0, \qquad \omega_{ni} = 0,$$

а остальные уравнения системы (5.56) примут вид

$$\nabla_\delta\lambda_{ij} + \lambda_{ij}\pi_{nn} = 0, \tag{5.57}$$

$$\nabla_\delta\lambda_{ijk} + \lambda_{ijk}\pi_{nn} - 3\sum_h \lambda_{(ij}\lambda_{k)h} = 0. \tag{5.58}$$

Здесь δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам, а $\pi_{uv} = \omega_{uv}(\delta)$, $u, v = 1, 2, \ldots, n$.

Величины λ_{ij} образуют дважды ковариантный симметричный относительный тензор — асимптотический тензор гиперповерхности V^{n-1}. Величины λ_{ijk} не образуют тензора, так как зависят от выбора вектора $\boldsymbol{e}_n$ в точке $\boldsymbol{x}$, — на это указывает наличие в уравнениях (5.58) величин π_{nn}, определяющих смещение вектора $\boldsymbol{e}_n$.

Предположим, что определитель матрицы (λ_{ij}) отличен от нуля, т. е. гиперповерхность V^{n-1} не является тангенциально вырожденной.

Построим геометрический объект, координаты которого зависят только от смещения вектора $\boldsymbol{e}_n$. Для этого построим тензор Λ_{ij}, матрица которого является обратной к матрице асимптотического тензора. В силу формулы (5.57) этот тензор удовлетворяет условиям

$$\nabla_\delta\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}\pi_{nn} = 0. \tag{5.59}$$

Далее положим

$$\lambda_k = \sum_i\sum_j \frac{1}{n-1}\Lambda_{ij}\lambda_{ijk}, \qquad \Lambda_i = \sum_k \Lambda_{ik}\lambda_k.$$

Дифференцируя последние уравнения по вторичным параметрам, используя формулы (5.57) и (5.58), мы получим

$$\nabla_\delta\Lambda_i = \Lambda_i\pi_{nn} + \frac{n+1}{n-1}\pi_{in} = 0.$$

Отсюда видно, что величины Λ_i образуют искомый геометрический объект.

Нетрудно проверить, что построенный с помощью объекта Λ_i вектор

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_n - \frac{n-1}{n+1}\sum_i \Lambda_i \boldsymbol{e}_i$$

удовлетворяет уравнению $\delta\boldsymbol{n} = \pi_{nn}\boldsymbol{n}$ и, следовательно, его направление не зависит от выбора вектора $\boldsymbol{e}_n$ в точке $\boldsymbol{x}$. Это направление внутренним образом связано с геометрией гиперповерхности и при $n = 3$ совпадает с направлением аффинной нормали Бляшке. Эта нормаль определяется окрестностью третьего порядка точки $\boldsymbol{x}$ гиперповерхности V^{n-1}, так как для ее построения были использованы величины λ_{ijk}, связанные с этой окрестностью. Можно доказать, что эта нормаль параллельна диаметру параболоида, имеющего касание второго порядка с гиперповерхностью V^{n-1} в ее точке $\boldsymbol{x}$.

Величины λ_{ijk} и λ_i позволяют построить важный тензор, связанный с окрестностью третьего порядка точки $\boldsymbol{x}$ гиперповерхности V^{n-1}. Этот тензор определяется формулой

$$b_{ijk} = \lambda_{ijk} - 3\frac{n-1}{n+1}\lambda_{(ij}\lambda_{k)}$$

и называется тензором Дарбу. Он удовлетворяет условию $\sum_i \sum_j b_{ijk}\Lambda_{ij} = 0$, т. е. аполярен асимптотическому тензору λ_{ij}. Для двумерной поверхности в трехмерном пространстве этот тензор был определен еще Г. Дарбу, а на случай гиперповерхности V^{n-1} был обобщен А. П. Норденом и Г. В. Бушмановой в работе [БН]. Обращение в нуль этого тензора характеризует гиперквадрики.

Метод, разработанный Г. Ф. Лаптевым, был широко использован для решения конкретных задач теории погруженных многообразий. Г. Ф. Лаптев в работе [Лап1] с помощью этого метода изучил геометрию поверхности V^2 в пространстве P^3, а в работе [Лап2] — геометрию гиперповерхности V^{n-1} в пространстве P^n. В этих работах были построены фундаментальные последовательности геометрических объектов для этих поверхностей, рассмотрены семейства соприкасающихся гиперквадрик и несколькими способами построено инвариантное оснащение этих поверхностей. М. А. Акивис в работе [Ак1] решил аналогичную задачу для гиперповерхности V^{n-1}, а в работе [Ак4] — для поверхности V^p конформного пространства C^n. П. И. Швейкин в работе [Шв] решил аналогичную задачу для поверхности V^p в пространстве E^n, а Н. М. Остиану

в работе [Oc] решила аналогичную задачу для поверхности V^p в пространстве P^n.

Заметим, что если в начале своего развития метод подвижного репера часто противопоставлялся тензорным методам, также имевшим большое значение в дифференциальной геометрии, то после появления метода продолжений и охватов Лаптева стало ясно, что оба эти метода легко сочетаются и взаимно дополняют друг друга, что хорошо видно на приведенном нами примере.

Псевдоконформная геометрия гиперповерхностей

В статьях [136], [136a] и в заметке «О псевдоконформной эквивалентности пространства двух комплексных переменных» [139] Картан изучал геометрию трехмерных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства, преобразованиями которого являются аналитические преобразования, образующие псевдогруппу Ли. Применяемый здесь Картаном термин «псевдоконформная геометрия», обозначающий обобщение конформной геометрии, в настоящее время применяется для геометрии пространства C_k^n. Но в этих работах Картан называл «конформной геометрией» геометрию псевдогруппы Ли аналитических преобразований плоскости комплексного переменного, а «псевдоконформной геометрией» — обобщение этой геометрии на случай нескольких комплексных переменных.

Изучение вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства было начато Пуанкаре в работе [Poi5]. В этой работе Пуанкаре доказал, что такая гиперповерхность обладает бесконечным множеством инвариантов относительно аналитических преобразований этого пространства. Пуанкаре называл эти преобразования, по аналогии с аналитическими преобразованиями одного комплексного переменного, конформными отображениями; термин «псевдоконформные отображения» был предложен Ф. Севери. Бениамино Сегре (1903—1973) в работах «По поводу проблемы Пуанкаре о псевдоконформном отображении» [Se2] и «Геометрические вопросы, связанные с функциями двух комплексных переменных» [Se2] нашел новые геометрические свойства этих гиперповерхностей. Картан, развивая идеи Сегре, дал классификацию вещественных гиперповерхностей плоскости $\mathbb{C}E^2$, которую можно рассматривать как пространство E^4 с комплексной структурой, по допускаемым этими гиперповерхностями «псевдоконформным преобразованиям».

Эти работы Картана получили значительное развитие в статье Ш. Чжэня и Ю. К. Мозера «Вещественные гиперповерхности в комплексных многообразиях» [ChM].

Метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева, обобщающий метод подвижного репера Картана, был распространен Анатолием Михайловичем Васильевым (1923—1987) на пространства, в которых действуют бесконечномерные псевдогруппы преобразований, в статьях [Вас1] и [Вас2] и в книге [Вас3]. Метод Васильева охватывает еще более широкий круг дифференциально-геометрических исследований.

Глава 6

Римановы и симметрические пространства

Римановы пространства

Евклидово пространство R^n, эллиптическое пространство S^n и гиперболическое пространство H_n являются частными случаями *риманова пространства* V^n, определенного Б. Риманом в 1854 г. в лекции [Ри2]. Геометрии римановых пространств посвящены книги Картана [84], [108а], [114] и [183].

Риманово пространство V^n является многообразием, точки которого определяются вещественными координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и переход от этой системы координат к другой системе координат производится с помощью дифференцируемых функций. Расстояние ds между бесконечно близкими точками с координатами x^i и $x^i + dx^i$ задается формулой

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{6.1}$$

где g_{ij} — дифференцируемые функции координат x^i точек, а квадратичная форма (6.1) положительно определенная.

Интегрируя выражение ds вдоль кривой пространства V^n, мы найдем *длину дуги* этой кривой. Сравнивая различные кривые, соединяющие две точки пространства V^n, мы найдем *геодезические линии*. Линия называется геодезической, если для всяких двух достаточно близких ее точек дуга линии между этими точками является кратчайшей. Коэффициенты g_{ij} позволяют также найти угол φ между касательными векторами $\{dx^i\}$ и $\{\delta x^i\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_i \sum\limits_j g_{ij}\, dx^i\, \delta x^j}{\sqrt{\sum\limits_i \sum\limits_j g_{ij}\, dx^i\, dx^j}\sqrt{\sum\limits_i \sum\limits_j g_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j}}. \tag{6.2}$$

Элемент объема пространства V^n может быть выражен через определитель g матрицы (g_{ij}) по формуле

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{6.3}$$

Объем области пространства V^n равен интегралу выражения (6.3) по этой области. Объемы областей m-мерных поверхностей пространства V^n и, в частности, площади областей двумерных поверхностей этого пространства можно определить подобным образом.

Формула (6.2) для определения углов между линиями пространства V^n и формула для определения площади области двумерной поверхности этого пространства позволяют найти наиболее важное понятие римановой геометрии — *секционную кривизну* пространства V^n в данной точке $\boldsymbol{x}(x^i)$ в данном двумерном направлении, определяемом дифференциалами dx^i и δx^i. Для этого следует провести две геодезические линии через точку x в направлении этих дифференциалов, соединить точки y и z этих линий третьей геодезической линией, найти площадь S_Δ геодезического треугольника xyz, углы A, B, C этого треугольника и их сумму $A + B + C$. Тогда секционная кривизна K в данной точке в данном двумерном направлении равна пределу отношения разности $A + B + C - \pi$ к площади S_Δ треугольника при его стягивании в данную точку x, при котором стороны треугольника остаются касательными к линиям xy и xz:

$$K = \lim_{S_\Delta \to 0} \frac{A + B + C - \pi}{S_\Delta}. \tag{6.4}$$

В частности, в случае пространства S^n кривизны $1/r^2$, где площадь треугольника ABC равна $r^2(A + B + C - \pi)$, выражение под знаком предела является постоянным числом $1/r^2$. Этому же числу равна секционная кривизна K во всех точках и во всех двумерных направлениях пространства S^n. В случае пространства H^n кривизны $-1/q^2$, где площадь треугольника ABC равна $q^2(\pi - A - B - C)$, выражение под знаком предела равно постоянному числу $-1/q^2$. Этому же числу равна секционная кривизна K во всех точках и во всех двумерных направлениях пространства H^n. В случае пространства R^n, где для всякого треугольника ABC сумма $A + B + C$ равна π, секционная кривизна K во всех точках и во всех двумерных направлениях равна 0. Поэтому пространства S^n, H^n и R^n являются римановыми пространствами постоянной кривизны, соответственно положительной, отрицательной и нулевой, и секционная кривизна этих пространств совпадает с их кривизной.

С каждой точкой x риманова пространства V^n связано евклидово пространство $T_x(V^n)$, касательное к нему в этой точке, и дифференциалы dx^i координат точек пространства V^n можно рассматривать как координаты векторов пространства $T_x(V^n)$, касательного к пространству V^n в этой точке.

В первом издании своей книги [114] Картан связывал с каждой точкой пространства V^n так называемый *натуральный репер* — векторный базис пространства $T_x(V^n)$, состоящий из векторов $\boldsymbol{e}_i$, касательных к координатным линиям системы координат $\{x^i\}$. Векторы $\boldsymbol{e}_i$ с точностью до бесконечно малых высших порядков совпадают с отрезками, соединяющими точки $x(x^i)$ и $x'(x^i + dx^i)$. Поэтому с точностью до бесконечно малых высших порядков координаты векторов пространства $T_x(V^n)$ совпадают с дифференциалами dx^i. Векторы $\boldsymbol{e}_i$ натурального репера часто обозначаются $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Риманову геометрию в натуральном репере обычно излагают с помощью тензорного исчисления в той форме, которую придал ему Т. Леви-Чивита в статье «Методы абсолютного дифференциального исчисления и их применение» [LeC].

При преобразованиях координат $x^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ векторы натурального репера преобразуются по закону

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}. \tag{6.5}$$

При тех же преобразованиях координаты контравариантных векторов $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$ преобразуются по закону

$$a^{i'} = \sum_i a^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{6.6}$$

где $\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — матрица, обратная для матрицы $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, а координаты ковариантных векторов $\boldsymbol{a} = \{a_i\}$ преобразуются по закону

$$a_{i'} = \sum_i a_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \tag{6.7}$$

с той же матрицей $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, что и для векторов $\boldsymbol{e}_i$. Тензоры $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ с p контравариантными и q ковариантными индексами преобразуются по закону

$$T^{i'_1 i'_2 \ldots i'_p}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q} = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_p}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_q} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}. \tag{6.8}$$

Дифференциалы dx^i координат x^i преобразуются по тому же закону, что и координаты контравариантных векторов, а частные производные по тому же закону, что и координаты ковариантных векторов. Величины g_{ij} образуют дважды ковариантный тензор, называемый метрическим

тензором. В натуральном репере геодезические линии пространства V^n определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \sum_j \sum_k \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{6.9}$$

где функции Γ^i_{jk}, называемые *символами Кристоффеля* и не образующие тензора, выражаются через тензор g_{ij} по формуле

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right) g^{ih}, \tag{6.10}$$

где g^{ij} есть обратный тензор для тензора g_{ij}, т. е. $\sum\limits_i g^{ij} g_{hi} = \delta^j_h$.

Секционная кривизна в точке x в двумерном направлении, определяемом дифференциалами dx^i и δx^i, может быть выражена формулой

$$K = \frac{\sum\limits_i \sum\limits_j \sum\limits_k \sum\limits_l R_{ij,kl}\, dx^i\, dx^k\, \delta x^j\, \delta x^l}{\sum\limits_i \sum\limits_j \sum\limits_k \sum\limits_l (g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il})\, dx^i\, dx^k\, \delta x^j\, \delta x^l}, \tag{6.11}$$

где $R_{ij,kl}$ — *тензор Римана—Кристоффеля*, называемый также *тензором кривизны* риманова пространства, который может быть выражен через тензор g_{ij} и его производные по формуле

$$R_{ij,kl} = \sum_h \left(\frac{\partial \Gamma^h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \sum_h \left(\Gamma^h_{ig} \Gamma^g_{jk} - \Gamma^h_{jg} \Gamma^g_{ik}\right)\right) g_{hl}. \tag{6.12}$$

Из формулы (6.12) следует, что тензор $R_{ij,kl}$ удовлетворяет соотношениям

$$R_{ij,kl} = -R_{ji,kl} = -R_{ij,lk} = R_{ji,lk}, \tag{6.13}$$

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}, \tag{6.14}$$

$$R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0. \tag{6.15}$$

Соотношение (6.15) называется *тождеством Риччи* по имени основателя тензорного исчисления Г. Риччи-Курбастро (1853—1925), который установил это тождество.

Свертывая тензор кривизны $R_{ij,kl}$ пространства V^n по индексам i и l, мы получим *тензор Риччи*

$$R_{jk} = \sum_i \sum_l R_{ij,kl} g^{il}. \tag{6.16}$$

Так как в каждой точке пространства V^n заданы два тензора g_{ij} и R_{lj}, с каждой точкой этого пространства в общем случае связаны n главных направлений в смысле Риччи — направлений собственных векторов матрицы (R^l_j), определяемой соотношением

$$R^l_j = \sum_k R_{kj} g^{kl}. \tag{6.17}$$

Картан встречался с римановыми пространствами еще в своих работах по теории простых групп Ли. В докторской диссертации он доказал, что условие того, что комплексная группа Ли является полупростой, состоит в невырожденности квадратичной формы (2.22). Иными словами, Картан показал, что полупростые комплексные группы Ли являются комплексными римановыми пространствами. Аналогично, найденное Картаном в работе [38] условие полупростоты вещественной компактной группы Ли, состоящее в отрицательной определенности квадратичной формы (2.22), равносильно тому, что полупростые компактные вещественные группы Ли являются римановыми пространствами, в которых $ds^2 = -\varphi(\boldsymbol{h})$, где вектор $\boldsymbol{h} = \{dx^i\}$. Метрика риманова пространства, определенная в группах Ли таким образом, в настоящее время называется *метрикой Картана*. Эта метрика является единственной с точностью до масштаба метрикой в этих группах, инвариантной при групповых операциях $x \to ax$, $x \to xa$, $x \to x^{-1}$.

Псевдоримановы пространства

В той же работе [38] Картана впервые появляются *псевдоримановы пространства*, отличающиеся от римановых тем, что квадратичная форма (6.1), определяющая метрику пространства, не является положительно определенной, но является невырожденной знаконеопределенной формой.

В работе [38] Картан показал, что если принять форму $-\varphi(\boldsymbol{h})$ за ds^2, то некомпактные вещественные полупростые группы Ли являются псевдоримановыми пространствами. В настоящее время псевдориманово пространство, метрика которого определяется невырожденной квадратичной формой (6.1) индекса k, называется *псевдоримановым пространством индекса k* и обозначается V^n_k. Таким образом, в метрике Картана некомпактная полупростая вещественная группа Ли размерности r, характер которой равен δ, является псевдоримановым пространством V^r_k, индекс k которого связан с размерностью r и характером δ группы соотношением $\delta = r - 2k$.

Касательные пространства $T_x(V^n_k)$ в точках пространства V^n_k являются пространствами R^n_k. Пространства S^n_k являются пространствами V^n_k

постоянной положительной секционной кривизны, пространства H_k^n являются пространствами V_{k-1}^n постоянной отрицательной секционной кривизны, пространства R_k^n являются пространствами V_k^n нулевой секционной кривизны.

Важным стимулом для развития как геометрии псевдоримановых пространств, так и римановой геометрии было открытие в 1916 г. Альбертом Эйнштейном (1879—1955) *общей теории относительности*, согласно которой пространство-время является пространством V_1^4, секционная кривизна которого больше в тех точках, где больше плотность материи.

Дифференциальная геометрия подмногообразий пространств V^n и V_l^n в тензорной форме изложена Схоутеном и Стройком в книге [СхС].

Параллельное перенесение векторов

В 1917 г., вскоре после открытия общей теории относительности, Леви-Чивита ввел одно из важнейших понятий римановой и псевдоримановой геометрий — понятие *параллельного перенесения* векторов.

В то же время это открытие было сделано Я. А. Схоутеном. Коллега Схоутена Д. Я. Стройк (1894—2000) вспоминал: «Однажды, в 1918 году, Схоутен вбежал в мой кабинет чрезвычайно возбужденным, он держал в руках только что полученную из Рима статью Леви-Чивиты. Он сказал: „У него также есть мои геодезически движущиеся системы, но он называет их параллельными“. Статья была опубликована еще в 1917 г., но по условиям военного времени не могла прибыть раньше» [Row, с.16].

Схоутен своих результатов не опубликовал, и о них стало известно только из свидетельства Стройка.

В 1917 г. появилась также статья Ф. Севери «О кривизне поверхностей и многообразий» [Svr], где было дано геометрическое определение этого понятия, согласно которому всякому вектору $\boldsymbol{a}$ касательного пространства $T_x(V^n)$ в точке x пространства V^n можно поставить в соответствие вектор $'\boldsymbol{a}$ касательного пространства в точке x', бесконечно близкой к точке x того же пространства. Вектор $'\boldsymbol{a}$ определяется с помощью отображения окрестности точки x на окрестность точки x', которое является результатом последовательного отражения от точки x по геодезическим линиям, выходящим из этой точки, и такого же отражения от точки x_0, расположенной на геодезической линии xx' посередине между точками x и x'.

С точностью до бесконечно малых высших порядков вектор $\boldsymbol{a}$ совпадает с отрезком xy геодезической линии, причем указанное отображение переводит точку x в точку x', а точку y в точку y'; вектор $'\boldsymbol{a}$ с точностью до

бесконечно малых высших порядков совпадает с отрезком $x'y'$ геодезической линии. Вектор $'\boldsymbol{a}$ является результатом параллельного перенесения вектора $\boldsymbol{a}$ из точки x в бесконечно близкую к ней точку x'.

Судя по тому, что Схоутен называл открытое им параллельное перенесение векторов «геодезически движущимися системами», он определил это перенесение в той же форме, что и Севери. Картан широко пользовался параллельным перенесением векторов именно в этой форме, ссылаясь на статью Севери.

При параллельном перенесении векторов из точки $\boldsymbol{x}(x^i)$ в бесконечно близкую точку $\boldsymbol{x}'(x^i + dx^i)$ контравариантный вектор $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$ переходит в вектор $'\boldsymbol{a}$ с координатами

$$'a^i = a^i + \sum_j \sum_k \Gamma^i_{jk} a^k dx^j. \tag{6.18}$$

Принимая, что скаляры не изменяются при параллельном перенесении, мы найдем, что параллельное перенесение ковариантного вектора $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ производится по формуле

$$'a_k = a_k - \sum_i \sum_j \Gamma^i_{jk} a_i\, dx^j, \tag{6.19}$$

а параллельное перенесение произвольного тензора $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ производится по формуле

$$'T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_k \Gamma^{i_1}_{jk} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} dx^j + \ldots + \sum_k \Gamma^{i_p}_{jk} T^{i_1 \ldots i_{p-1} k}_{j_1 \ldots j_q}\, dx^j -$$
$$- \sum_i \Gamma^i_{j j_1} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i j_2 \ldots j_q} dx^j - \ldots - \sum_i \Gamma^i_{j j_q} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} i}\, dx^j. \tag{6.20}$$

Если в пространстве V^n задано *векторное* или *тензорное поле*, т. е. в каждой точке этого пространства определен вектор или тензор некоторого типа, являющийся функцией этой точки, мы можем определить *ковариантную производную* этого вектора или тензора, вычитая из значения этого вектора или тензора в точке $\boldsymbol{x}'$ результат его параллельного перенесения из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{x}'$, деля полученную разность на разность Δx^j координат точек $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}$ и переходя к пределу полученного отношения при стремлении точки $\boldsymbol{x}'$ к точке $\boldsymbol{x}$. Ковариантная производная $\nabla_j a^i$ контравариантного вектора $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$ имеет координаты

$$\nabla_j a^i = \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{a^i(x^k + \Delta x^k) - 'a^i(x^k)}{\Delta x^j} = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_k \Gamma^i_{jk} a^k, \tag{6.21}$$

ковариантная производная $\nabla_j a_k$ ковариантного вектора $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ имеет координаты

$$\nabla_j a_k = \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{a_k(x^i + \Delta x^i) - {}'a_k(x^i)}{\Delta x^j} = \frac{\partial a_k}{\partial x^j} - \sum_i \Gamma^i_{jk} a_i, \tag{6.22}$$

а ковариантная производная $\nabla_j T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ тензора $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ имеет координаты

$$\nabla_j T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \frac{\partial T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}}{\partial x^j} + \sum_k \Gamma^{i_1}_{jk} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \ldots + \sum_k \Gamma^{i_p}_{jk} T^{i_1 \ldots i_{p-1} k}_{j_1 j_2 \ldots j_q} -$$
$$- \sum_i \Gamma^i_{j j_1} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i j_2 \ldots j_q} - \ldots - \sum_i \Gamma^i_{j j_q} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} i}. \tag{6.23}$$

Ковариантная производная всякого вектора или тензора является тензором, имеющим на одну ковариантную валентность больше, чем дифференцируемый вектор или тензор. Результат свертывания ковариантной производной $\nabla_j T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ с дифференциалом dx^j называется *абсолютным дифференциалом* и обозначается $DT^{i_1 i_1 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$.

Сравнивая формулы (6.9) и (6.21), мы видим, что формулу (6.9) можно записать в виде $\sum_j \nabla_j \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$, откуда следует, что геодезические линии пространства V^n можно также определить как такие линии, вдоль которых касательные векторы $\frac{dx^i}{ds}$ переносятся параллельно. Заметим также, что соотношение (6.10) равносильно соотношению $\nabla_k g_{ij} = 0$.

В пространствах V^n_k параллельное перенесение и ковариантное дифференцирование векторов и тензоров определяются аналогичным образом.

Риманова геометрия в ортогональном репере

В конце введения к книге [114] Картан писал: «Я был вынужден оставить в стороне многие важные вопросы. Они могли бы составить содержание следующего тома, в котором были бы изложены метод подвижного репера и его многочисленные применения» [114, с. 6].

Этот материал был изложен в книге [108а], представляющей собой лекции, которые Картан читал в 1926—1927 гг., записанные С. П. Фиников ым и изданные в его русском переводе, а также во втором издании [183] книги Картана [114]. В этих книгах с каждой точкой $\boldsymbol{x}$ пространства V^n связывается не натуральный репер в пространстве $T_{\boldsymbol{x}}(V^n)$, а ортонормированный репер $\{\boldsymbol{e}_i\}$ этого пространства ($\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$).

Деривационные формулы ортонормированного репера $\{\boldsymbol{e}_i\}$ имеют тот же вид (5.5), что и для ортонормированного репера пространства R^n; теперь мы будем записывать их в виде

$$d\boldsymbol{x} = \sum_i \omega^i \boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_i^j \boldsymbol{e}_j. \tag{6.24}$$

Здесь под дифференциалом $d\boldsymbol{x}$ имеется в виду вектор с координатами dx^i. Однако уравнения структуры пространства V^n отличаются от уравнений структуры пространства R^n и имеют вид

$$d\omega^i = \sum_k \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_i^j = \sum_k \Big(\omega_i^k \wedge \omega_k^j + \sum_l R_{i,kl}^j \omega^k \wedge \omega^l\Big), \tag{6.25}$$

где $R_{i,kl}^j = \sum_h R_{ih,kl} g^{hj}$ — *тензор кривизны*, который в этом случае уже не выражается через тензор $g_{ij} = \delta_{ij}$ и его производные по формуле (6.12).

В ортонормированном репере секционная кривизна K в двумерном направлении, определяемом единичными ортогональными векторами $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b^i\}$, вычисляется по той же формуле (6.11), что и в натуральном репере. В этом случае формула (6.11) принимает вид

$$K = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l R_{ij,kl} a^i a^k b^j b^l. \tag{6.26}$$

Сравнивая формулы (6.25) с формулой (5.13) для пространства постоянной кривизны $\frac{1}{r^2}$, мы найдем, что в этом пространстве в ортонормированном репере тензор кривизны $R_{ij,kl}$ имеет вид

$$R_{ij,kl} = \frac{1}{r^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{6.27}$$

Использование ортогонального репера позволяет решать в пространстве V^n многие задачи дифференциальной геометрии столь же просто, как в пространстве R^n.

Проблема погружения риманова пространства в евклидово

Проблема погружения риманова пространства V^n в виде n-мерной поверхности в евклидово пространство R^N достаточно большой размерности была поставлена одним из создателей многомерной геометрии Людвигом Шлефли (1814—1895) в «Заметке по поводу мемуара г. Бельтрами о пространствах постоянной кривизны» [Schl]. Шлефли рассуждал следующим образом: если пространство V^n с метрической

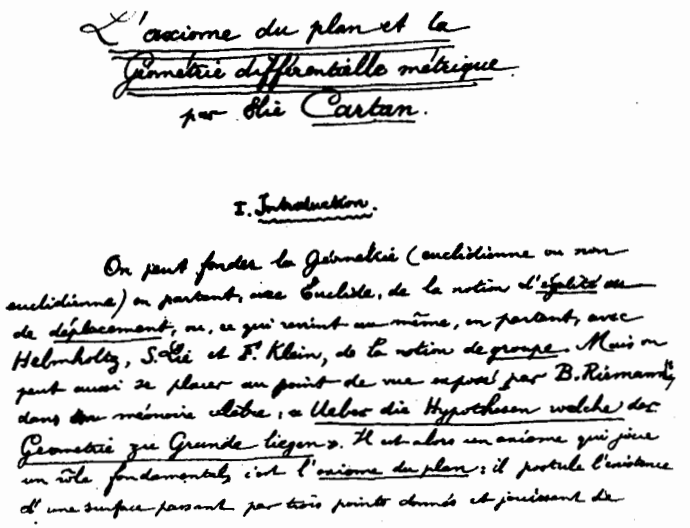
формой $ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\, du^i\, du^j$ погружено в пространство R^N в виде поверхности $x^k = x^k(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, то коэффициенты g_{ij} связаны с частными производными $x_i^k = \dfrac{\partial x^k}{\partial u^i}$ соотношениями $g_{ij} = \sum_k x_i^k x_j^k$. Так как число коэффициентов $g_{ij} = g_{ji}$ равно $\dfrac{n(n+1)}{2}$, этому же числу равно число полученных уравнений. Отсюда Шлефли сделал вывод, что пространство V^n, по крайней мере локально, можно погрузить в пространство R^n размерности $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Утверждение Шлефли о возможности локального погружения было доказано Морисом Жане (1888—1984) в работе «О возможности погружения данного риманова пространства в евклидово пространство» [Jan].

Результаты Жане были уточнены Картаном в работе [104] с тем же названием, что и работа [Jan]. В то время как Жане записывал задачу о погружении в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для исследования которой он применял чрезвычайно сложные методы, Картан решил эту задачу с помощью разработанной им теории систем уравнений Пфаффа в инволюции. Картан записывал системы уравнений, определяющих погружение пространства V^n в пространство R^N, в виде системы уравнений Пфаффа $\widetilde{\omega}^i = \omega^i$, $\widetilde{\omega}^\alpha = 0$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = n+1, \ldots, N$. Здесь ω^i — базисные формы пространства V^n, $\widetilde{\omega}^i$ — такие же формы поверхности V^n пространства R^N, на которую отображается пространство V^n. Применение леммы Картана к этим системам приводит к уравнениям $\widetilde{\omega}_j^i = \omega_j^i$. Используя уравнения структуры (6.25) пространства V^n и уравнения структуры поверхности V^n пространства R^N, Картан показал, что эта система уравнений Пфаффа находится в инволюции и пространство V^n может быть погружено в пространство R^N, где $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$, с произволом n функций $n-1$ вещественного переменного.

В частности, случаю $n = 2$ соответствует $N = 3$, т. е. двумерное риманово пространство всегда можно, хотя бы локально, погрузить в пространство R^3. Примером пространства V^2, которое можно погрузить в виде поверхности в пространство R^3 только локально, является плоскость Лобачевского H^2. В виде поверхностей постоянной отрицательной кривизны в пространство R^3 можно погрузить только отдельные участки этой плоскости. Например, Ф. Миндинг [Мин] представил в виде поверхностей вращения участки плоскости H^2, ограниченные дугой окружности, орицикла или эквидистанты, и двумя нормалями к этим кривым в концах их дуг.

Римановы пространства, удовлетворяющие «аксиоме плоскости»

В 1927 г. в сборнике «Памяти Н. И. Лобачевского», выпущенном в Казани к столетию открытия Лобачевским неевклидовой геометрии, Картан опубликовал статью [90]. На рис. 6.1 воспроизведено начало рукописи этой статьи, которая хранится на кафедре геометрии Казанского университета.


L'axiome du plan et la
Géométrie différentielle métrique
par Élie Cartan.

I. Introduction.

On peut fonder la Géométrie (euclidienne ou non euclidienne) en partant, avec Euclide, de la notion d'égalité ou de déplacement, ou, ce qui revient au même, en partant, avec Helmholtz, S. Lie et F. Klein, de la notion de groupe. Mais on peut aussi se placer au point de vue exposé par B. Riemann dans son mémoire célèbre, « Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen ». Il est alors un axiome qui joue un rôle fondamental, c'est l'axiome du plan : il postule l'existence d'une surface passant par trois points donnés et jouissant de

Рис. 6.1

Картан называл поверхность риманова пространства *геодезической в некоторой ее точке*, если эта поверхность совпадает с совокупностью геодезических линий риманова пространства, выходящих из этой точки и касающихся некоторого плоского элемента пространства в этой точке. *Вполне геодезической поверхностью* риманова пространства Картан называл такую поверхность этого пространства, которая является геодезической поверхностью в каждой своей точке. Требование того, чтобы всякая геодезическая поверхность в любой своей точке была бы вполне геодезической плоскостью, Картан называл «аксиомой плоскости». Термин «вполне геодезической поверхности» риманова пространства был введен Жаком Адамаром (1865—1963) в 1902 г. в работе «О линейных элементах многих измерений» [Had]. Адамар определил эти поверхности как такие, каждая геодезическая линия которых является геодезической линией всего пространства.

В случае евклидовых и неевклидовых пространств роль геодезических линий играют прямые линии, а роль вполне геодезических поверхностей — плоскости, чем и объясняется название аксиомы Картана. Ясно, что евклидовы и неевклидовы пространства удовлетворяют этой аксиоме. В работе Картана доказывается, что если риманово пространство удовлетворяет «аксиоме плоскости», то оно может быть геодезически и конформно отображено на евклидово или неевклидово пространство.

Симметрические римановы пространства

В заметке 1926 г. «О римановых пространствах, в которых параллельный перенос сохраняет кривизну» Картан обратил внимание на опубликованную в том же году заметку Гарри Леви «Каноническая форма ds^2, при которой исчезают пятииндексные символы Римана» [Lev]. Так как четырехиндексными символами Римана Г. Леви называл координаты $R_{ij,kl}$ тензора Римана, а пятииндексными — координаты тензора $\nabla_h R_{ij,kl}$, являющегося ковариантной производной тензора $R_{ij,kl}$, пространства, выделенные Г. Леви, представляли собой римановы пространства, удовлетворяющие условию

$$\nabla_h R_{ij,kl} = 0. \tag{6.28}$$

Г. Леви установил, что условию (6.28) удовлетворяют пространства постоянной кривизны, т. е. пространства R^n, S^n и H^n и декартовы произведения этих пространств, но не нашел других римановых пространств, обладающих этим свойством. Ни Г. Леви, ни Картан не знали, что тот же класс римановых пространств был определен Петром Алексеевичем Широковым в работе «Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в римановых пространствах» [Ши1], опубликованной в 1925 г. в Казани. П. А. Широков также установил, что пространства постоянной кривизны обладают этим свойством, и нашел общий вид трехмерных римановых пространств этого типа.

В заметке [87] Картан указал, что неприводимые пространства указанного типа «подразделяются на 10 больших классов, каждый из которых зависит от одного или двух произвольных целых чисел; кроме того, имеются 12 исключительных классов, соответствующих особым простым группам G». Далее он писал: «Среди больших классов я укажу только, помимо пространств простых групп, которые рассматривались в заметке I, класс пространств постоянной кривизны, упомянутый г-ном Гарри Леви, и класс эрмитовых эллиптических и гиперболических пространств» [87, с. 545]. В тексте заметки вместо слова «пространств» в конце приведенной нами цитаты ошибочно написано «групп». Под «за-

меткой I» Картан подразумевал заметка [91] Картана и Я. А. Схоутена «О геометрии группового многообразия простых и полупростых групп», в которой были определены три типа параллельных перенесений векторов в группах Ли, обозначаемые (−), (+) и (0), первые два из которых являются абсолютными параллелизмами, а третий в случае простых и полупростых групп Ли является параллельным перенесением векторов в римановых или псевдоримановых пространствах. Кратко упомянув в заметке [87] об этом факте, Картан указывает, что тем же свойством обладают и вполне геодезические подмногообразия групповых пространств простых и полупростых групп Ли. Число 10 «больших классов» — среднее из двух впоследствии применявшихся Картаном чисел типов симметрических римановых пространств с классическими фундаментальными группами — 11 типов AI—IV, BI—II, CI—II и DI—III и 9 типов AI—IV, BDI—II, CI—II и DIII, а число 12 «особых классов» совпадает с числом типов симметрических римановых пространств с особыми фундаментальными группами EI—IX, FI—II и GI. Картан пишет также, что в простых и полупростых группах Ли можно определить метрику симметрических римановых пространств — такой метрикой является метрика Картана в этих группах. Симметрическими пространствами являются и вполне геодезические поверхности в этих группах.

Таким образом, ясно, что, публикуя заметку [87], Картан уже располагал значительным числом результатов своей теории симметрических римановых пространств.

Систематическому изложению этой теории посвящена статья Картана «Об одном замечательном классе римановых пространств» в двух частях [93] и [94], опубликованных в 1926—1927 гг. Картан определял эти пространства «тем свойством, что их риманова кривизна в любой площадке сохраняется при параллельном переносе, или, выражаясь более абстрактно, тем, что ковариантная производная тензора Римана—Кристоффеля в них тождественно равна нулю» [93, с. 214], т. е. выполнением тождества (6.28). В статье [93] Картан называл эти пространства «пространствами $\mathcal{E}$», а позднее «симметрическими римановыми пространствами». Последний термин объясняется тем, что, как доказал Картан в работе [93, 94], условие (6.28) равносильно тому, что отражение от каждой точки пространства по геодезическим линиям является изометрическим преобразованием (движением) пространства. В той же работе Картан доказал, что все компактные простые и полупростые группы Ли, если ввести в них метрику Картана, являются симметрическими римановыми пространствами. В этом случае отражение от единицы группы имеет вид $x \to x^{-1}$, отражение от произвольного элемента a группы

имеет вид $x \to ax^{-1}a$, а геодезическими линиями являются однопараметрические подгруппы и их классы смежности. Здесь же Картан доказал, что всякое неприводимое компактное симметрическое риманово пространство можно реализовать в виде вполне геодезической поверхности в группе движений этого пространства, проходящей через единицу этой группы. Если σ — отражение от произвольной точки этого пространства, а σ_0 — отражение от некоторой его фиксированной точки, то эта вполне геодезическая поверхность в группе состоит из произведений $\sigma_0\sigma$.

Картан рассматривал также симметрические римановы пространства, группы движений которых — некомпактные простые или полупростые группы Ли. Эти пространства можно реализовать в виде вполне геодезических поверхностей в их группах движений с псевдоримановыми метриками Картана. В этом случае группа Ли будет симметрическим псевдоримановым пространством, которое обладает свойством (6.28) и другими свойствами симметрических пространств.

В случае, когда группа движений симметрического риманова или псевдориманова пространства является простой группой Ли, алгебра Ли этой группы допускает разложение $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{E}$ (см. (2.57)). При этом подалгебра $\mathbf{K}$ является алгеброй Ли группы изотропии данного пространства, т. е. группы вращений вокруг его точки, а подпространство $\mathbf{E}$ является касательной плоскостью к вполне геодезической поверхности в группе, изображающей симметрическое пространство. В силу (2.59) подпространство $\mathbf{E}$ алгебры Ли $\mathbf{G}$, которое можно рассматривать как касательное пространство к симметрическому риманову пространству, замкнуто относительно операции $[[XY]Z]$. Такие подпространства называют *тройными системами Ли*.

Так как в алгебре Ли группы Ли форма Киллинга—Картана имеет вид (2.22), риманова или псевдориманова метрика Картана в группе Ли определяется линейным элементом

$$ds^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l c^l_{ik} c^k_{jl} \omega^i \omega^j, \tag{6.29}$$

а тензор Римана этого симметрического пространства имеет вид

$$R^j_{i,kl} = \frac{1}{4} \sum_h c^j_{hi} c^h_{kl}. \tag{6.30}$$

В случае, когда симметрическое пространство соответствует разложению (2.57) алгебры Ли $\mathbf{G}$, а коммутаторы базисных элементов этой алгебры Ли имеют вид (2.59), метрика симметрического пространства

определяется линейным элементом

$$ds^2 = \sum_a \sum_u \sum_v \sum_w c^a_{uw} c^w_{va} \omega^u \omega^v, \tag{6.31}$$

а тензор Римана этого пространства имеет вид

$$R^v_{u,wz} = \frac{1}{4} \sum_a c^v_{au} c^a_{wz}. \tag{6.32}$$

Сравнивая формулы (6.29) и (6.31) с формулами (6.30) и (6.32), мы видим, что в обоих случаях тензор Риччи симметрического пространства пропорционален его метрическому тензору, откуда вытекает, что в симметрических римановых и псевдоримановых пространствах нельзя определить главных направлений в смысле Риччи.

Далее Картан рассмотрел классификацию инволютивных автоморфизмов алгебр Ли компактных простых групп Ли, которую мы изложили в главе 2 для групп классов A_n, B_n, C_n и D_n, и привел классификацию симметрических римановых пространств, группы движений которых — компактные простые группы Ли.

Эти симметрические пространства определяются теми же *характерами* δ, что и некомпактные простые группы Ли, соответствующие тем же инволютивным автоморфизмам компактных простых групп Ли. В случае симметрических пространств с компактными простыми группами движений эти характеры имеют простой геометрический смысл: если алгебра Ли группы G движений симметрического пространства G/K допускает разложение (2.57), то характер δ этого симметрического пространства равен разности $\dim \mathbf{E} - \dim \mathbf{K}$ размерностей подпространства $\mathbf{E}$ и подалгебры $\mathbf{K}$.

В таблице 6.1 указаны неприводимые симметрические римановы пространства с компактными простыми группами движений, соответствующие инволютивным автоморфизмам компактных простых групп Ли. В первом столбце этой таблицы указаны классы простых групп Ли, во втором столбце — обозначения симметрических пространств Картана, в третьем столбце — характеры этих пространств, в четвертом столбце — размерности этих пространств, в пятом — группы изотропии этих пространств с указанием линейных представлений их кронекеровских сомножителей.

Симметрические римановы пространства с компактными группами движений, являющиеся компактными простыми группами Ли с метриками Картана, можно рассматривать как такие симметрические пространства, для которых в разложении (2.57) отсутствует подпространство $\mathbf{E}$. Характеры этих симметрических пространств равны произведениям их размерностей на -1.

Таблица 6.1

A_n	AI	n	$\frac{n(n+3)}{2}$	$\varphi_1(O_{n+1})$
	AII	$-n-2$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$	$\varphi_2(C_{(n+1)/2})$
	$AIII$	$4l(n-l+1)-n(n+2)$	$2l(n-l+1)$	$\varphi_1(A_{l-1})\varphi_1(A_{n-l})\varphi_0$
	AIV	$2n-n^2$	$2n$	$\varphi_1(A_{n-1})\varphi_0$
B_n	BI	$2l(2n-l+1)-n(2n+1)$	$l(2n-l+1)$	$\varphi_1(O_l)\varphi_1(O_{2n+1-l})$
	BII	$2n-n^2$	$2n$	$\varphi_1(O_{2n})$
C_n	CI	n	$n(n+1)$	$\varphi_1^2(A_{n-1})\varphi_0$
	CII	$8l(n-l)-n(2n+1)$	$4l(n-l)$	$\varphi_1(C_l)\varphi_1(C_{n-1})$
D_n	DI	$2l(2n-l)-n(2n-1)$	$l(2n-l)$	$\varphi_1(O_l)\varphi_1(O_{2n-l})$
	DII	$(2-n)(2n-1)$	$2n-l$	$\varphi_1(O_{2n-1})$
	$DIII$	$-n$	$n(n-1)$	$\varphi_2(A_{n-1})\varphi_0$
G_2	GI	2	8	$\varphi_1^3(A_1)\varphi_1(A_1)$
F_4	FI	4	2	$\varphi_3(C_3)\varphi_1(A_1)$
	FII	-20	16	$\varphi_4(O_9)$
E_6	EI	6	4	$\varphi_4(C_4)$
	EII	2	40	$\varphi_3(A_3)\varphi_1(A_1)$
	$EIII$	-14	32	$\varphi_5(O_{10})\varphi_0$
	EIV	-26	26	$\varphi_1(F_4)$
E_7	EV	7	70	$\varphi_4(A_7)$
	EVI	-5	64	$\varphi_6(O_{12})\varphi_1(A_1)$
	$EVII$	-25	54	$\varphi_1(E_6)\varphi_0$
E_8	$EVIII$	8	128	$\varphi_8(O_{16})$
	EIX	-24	112	$\varphi_1(E_7)\varphi_1(A_1)$

В книге Оттмара Лооса «Симметрические пространства» [Loo] симметрические римановы пространства рассматриваются как пространства с некоторой алгебраической структурой, в которой всякой паре точек x и y ставится в соответствие третья точка z этого пространства — отражение точки x от точки y; при этом уравнение $xy = z$ имеет единственное решение при любых x и z. Симметрическое пространство с этой операцией является квазигруппой, т. е. отличается от группы отсутствием ассоциативности основной операции и единицы.

В работе [107] Картан нашел все неприводимые римановы симметрические пространства, фундаментальные группы которых — некомпактные простые группы Ли, а группы изотропии — компактные подгруппы этих групп.

Все неприводимые псевдоримановы симметрические пространства с простыми фундаментальными группами были найдены М. Берже и А. Г. Феденко в работах [Beg1] и [Фед1].

Эрмитовы пространства как симметрические пространства

Симметрические римановы пространства BII и DII, размерности которых равны соответственно $2n$ и $2n-1$, а группы движений — компактные простые группы Ли классов B_n и D_n, т. е. группы O_{2n+1} и O_{2n}, являются эллиптическими пространствами S^{2n} и S^{2n-1}.

Симметрическое риманово пространство AIV, размерность которого равна $2n$, а группа движений — компактная простая группа Ли класса A_n, т. е. группа $\mathbb{C}SU_{n+1}$, является комплексным эллиптическим пространством $\mathbb{C}S^n$.

Симметрическое риманово пространство CII, размерность которого при $l=1$ равна $4(n-1)$, а группа движений — компактная простая группа Ли класса C_{n+1}, т. е. группа $\mathbb{H}U_n$, является кватернионным эрмитовым эллиптическим пространством $\mathbb{H}\bar{S}^n$.

Симметрическое риманово пространство FII, размерность которого равна 16, а группа движений — компактная простая группа Ли класса F_4, является октонионной эрмитовой эллиптической плоскостью $\mathbb{O}\bar{S}^2$.

В главе 3 мы отмечали, что прямые $\mathbb{C}\bar{S}^1$, $\mathbb{H}\bar{S}^1$ и $\mathbb{O}\bar{S}$ кривизны $1/r^2$ изометричны соответственно сфере радиуса $r/2$ пространства R^3 и гиперсферам того же радиуса в пространствах R^5 и R^9. Двумерные направления, принадлежащие этим прямым, называются *голоморфными направлениями*. Поэтому секционная кривизна симметрических пространств V^{2n}, V^{4n} и V^{16}, изометричных пространствам $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$, в этих двумерных направлениях равна $4/r^2$. Так как это число постоянно, указанные римановы пространства V^{2n}, V^{4n} и V^{16} являются *пространствами постоянной голоморфной кривизны*.

Подмногообразия пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ кривизны $1/r^2$, состоящие из точек с вещественными координатами, и подмногообразия, получаемые из них движениями этих пространств, называются *нормальными n-цепями*. Эти подмногообразия изометричны пространству S^n кривизны $1/r^2$. Двумерные направления, принадлежащие нормальным n-цепям, называются *антиголоморфными направлениями*. Поэтому секционная кривизна симметрических пространств V^{2n}, V^{4n}

и V^{16}, изометричных пространствам $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$, в этих двумерных направлениях равна $1/r^2$.

Э. Штуди в статье [Stu2] нашел, что секционная кривизна пространства V^6, изометричного пространству $\mathbb{O}\bar{S}^3$ кривизны $1/r^2$, в произвольном двумерном направлении равна

$$K = \frac{1+3k}{r^2}. \tag{6.33}$$

Тому же числу равна секционная кривизна пространств V^{2n}, V^{4n} и V^{16}, изометричных пространствам $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$, в произвольном двумерном направлении. В случае, когда двумерное направление голоморфно, $k = 1$, в случае, когда это направление антиголоморфно, $k = 0$, в остальных случаях $0 < k < 1$.

В настоящее время коэффициент k обозначается $\cos^2\alpha$, а угол α называется *углом голоморфии*. Для голоморфных двумерных направлений $\alpha = 0$, для антиголоморфных направлений $\alpha = \pi/2$, для остальных направлений $0 < \alpha < \pi/2$. Для вычисления угла α в данной точке в данном двумерном направлении проведем из этой точки два единичных вектора a и b, касающихся этого направления, ортогональных в метрике евклидова пространства, касательного в данной точке к риманову пространству, и составим эрмитово скалярное произведение (a, b) этих векторов. Нетрудно проверить, что это произведение не зависит от выбора векторов a и b. В случае пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ это произведение равно $i\cos\alpha$, в случае пространства $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ это произведение равно $u\cos\alpha$, где u — единичный кватернион или октонион, называемый *ортом голоморфии* в данной точке в данном двумерном направлении. Угол α равен углу между двумя прямыми, проведенными из данной точки в направлении векторов a и b. Свойства угла α для пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ были найдены П. А. Широковым в работе [Ши2]; Широков называл угол голоморфии «углом наклона».

Применяя формулу (6.32) для вычисления тензора кривизны в пространстве V^{2n}, изометричном пространству $\mathbb{C}\bar{S}^n$, в ортонормированном репере, состоящем из векторов унитарно-ортонормированного репера пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ и из произведений этих векторов на i, мы найдем, что тензор кривизны этого пространства имеет вид

$$R_{ij,kl} = \frac{1}{r^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} - \varepsilon_{il}\varepsilon_{jk} + 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}), \tag{6.34}$$

где ε_{ij} — кососимметрический тензор с координатами $\varepsilon_{2i-1,2i-1} = \varepsilon_{2i,2i} = 0$, $\varepsilon_{2i-1,2i} = -\varepsilon_{2i,2i-1} = 1$. Формула для тензора $R_{ij,kl}$ того же пространства в натуральном репере, аналогичная формуле (6.34), была найдена П. А. Широковым в работе [Ши2].

Применяя формулу (6.32) для вычисления тензора кривизны в пространствах V^{4n} и V^{16}, изометричных пространству $\mathbb{C}\bar{H}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}$, в ортонормированных реперах, состоящих из векторов унитарно-ортонормированных реперов пространства $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ и произведений этих векторов на отличные от 1 базисные элементы i_α алгебр $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$, мы найдем, что тензоры кривизны этих пространств имеют вид

$$R_{ij,kl} = \frac{1}{r^2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_\alpha (\varepsilon_{\alpha ik}\varepsilon_{\alpha jl} - \varepsilon_{\alpha il}\varepsilon_{\alpha jk} + 2\varepsilon_{\alpha ij}\varepsilon_{\alpha kl}), \tag{6.35}$$

где $\varepsilon_{\alpha ij}$ — тензоры, кососимметрические по индексам i и j, соответствующие базисным элементам i_α алгебр $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$.

В работе [Ши2] П. А. Широков нашел также тригонометрические формулы для геодезических треугольников ABC пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$ со сторонами a, b, c, противолежащими вершинам A, B, C, и с углами голоморфии α, β, γ в этих вершинах: две равносильные формы теоремы косинусов

$$\cos^2\frac{a}{r} = \left(\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A\right)^2 + \\ + \sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}\sin^2 A\cos^2\alpha, \tag{6.36}$$

$$\cos\frac{2a}{r} = \cos\frac{2b}{r}\cos\frac{2c}{r} + \sin\frac{2b}{r}\sin\frac{2c}{r}\cos A - \\ - 2\sin\frac{2b}{r}\sin^2\frac{2c}{r}\sin^2 A\sin^2\alpha, \tag{6.37}$$

и две равносильные формы теоремы синусов

$$\frac{\sin A\sin\alpha}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin B\sin\beta}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin C\sin\gamma}{\sin\frac{c}{r}}, \tag{6.38}$$

$$\frac{\sin A\cos\alpha}{\sin\frac{2a}{r}} = \frac{\sin B\cos\beta}{\sin\frac{2b}{r}} = \frac{\sin C\cos\gamma}{\sin\frac{2c}{r}}. \tag{6.39}$$

Те же формулы имеют место для геодезических треугольников ABC в пространстве $\mathbb{H}\tilde{\bar{S}}^n$ и на плоскости $\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$. В этих случаях в вершинах треугольников определены орты голоморфии, причем эти орты — одни и те же для всех вершин одного треугольника.

В том случае, когда треугольник ABC расположен на нормальной n-цепи ($\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$), формулы (6.36) и (6.38) принимают вид теорем косинусов и синусов для пространства S^n кривизны $1/r^2$.

В случае, когда треугольник ABC расположен на прямой линии ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), формулы (6.37) и (6.39) принимают вид теорем косинусов и синусов на сфере радиуса $r/2$.

Симметрические пространства и образы симметрии

Во введении к статье [93] Картан писал: «Эти новые пространства допускают и непосредственно геометрическое определение. Эти пространства могут быть представлены геометрическими образами (êtres géométriques), допускающими простое определение в обычном пространстве (трех или более измерений)» [93, с. 217]. Эти геометрические образы — *образы симметрии*, которые мы рассматривали в главе 3.

Каждое симметрическое пространство допускает геометрическую интерпретацию в виде многообразия образов симметрии в одном из однородных пространств, фундаментальные группы которых изоморфны группе движений симметрического пространства. При этом группа изотропии симметрического пространства изоморфна стационарной подгруппе образа симметрии.

Многие из этих геометрических интерпретаций изложены Картаном в статье [107].

В таблице 6.2 указаны эти интерпретации для всех симметрических пространств, группами движений которых являются компактные простые группы Ли. В первом столбце этой таблицы указаны группа Ли и пространство интерпретации, во втором столбце — симметрические пространства, в третьем — образы симметрии, многообразия которых образуют интерпретации симметрических пространств.

Компактная простая группа G_2 является группой автоморфизмов тела $\mathbb{O}$ октонионов. Если ввести в это тело метрику пространства R^8, в которой расстояние между октонионами x и y равно модулю $|y - x|$ их разности, то автоморфизмы этого тела изображаются вращениями пространства R^8 вокруг точки 0, переводящими в себя вещественную ось этого тела. Поэтому автоморфизмы тела $\mathbb{O}$ переводят в себя гиперплоскость, проходящую через точку 0 перпендикулярно вещественной оси, и шестимерную сферу радиуса 1 с центром в точке 0 в этой гиперплоскости. Отождествляя диаметрально противоположные точки этой сферы, мы получим эллиптическое пространство S^6. Группа автоморфизмов тела $\mathbb{O}$ транзитивна на пространстве S^6. Пространство S^6, если считать его фундаментальной группой эту группу автоморфизмов, называется *G-эллиптическим пространством* и обозначается Sg^6. Единственными образами симметрии пространства Sg^6 являются двумерные плоскости, получаемые при отождествлении диаметрально

Таблица 6.2

A_n $\mathbb{C}S^n$	AI AII $AIII$ AIV	Нормальная n-цепь Паратактическая конгруэнция прямых $(l-1)$-мерная и полярная ей $(n-l)$-мерная плоскости Точка и полярная ей гиперплоскость
B_n S^{2n}	BI BII	$(l-1)$-мерная и полярная ей $(2n-l)$-мерная плоскости Точка и полярная ей гиперплоскость
C_n $\mathbb{H}\bar{S}^{n-1}$	CI CII	Нормальная комплексная $(n-1)$-цепь l-мерная и полярная ей $(n-l)$-мерная плоскость, при $l=0$ точка и полярная ей гиперплоскость
D_n S^{2n-1}	DI DII $DIII$	$(l-1)$-мерная и полярная ей $(2n-1-l)$-мерная плоскости Точка и полярная ей гиперплоскость Паратактическая конгруэнция прямых
G_2, Sg^6	GI	Специальная двумерная плоскость
F_4 $\mathbb{O}\bar{S}^2$	FI FII	Нормальная кватернионная 2-цепь Точка и полярная ей прямая
E_6 $\mathbb{CO}\tilde{\bar{S}}^2$	EI EII $EIII$ EIV	Нормальная 2-бицепь Нормальная бикватернионная 2-бицепь Точка и полярная ей прямая Нормальная октонионная 2-цепь
E_7 $\mathbb{HO}\tilde{\bar{S}}^2$	EV EVI $EVII$	Нормальная 2-бицепь Точка и полярная ей прямая, нормальная кватернионная 2-цепь Нормальная биоктонионная 2-цепь
E_8 $\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$	$EVIII$ EIX	Точка и полярная ей прямая, нормальная 2-бицепь Нормальная кватернионная 2-цепь

противоположных точек шестимерной сферы из ее пересечений с подтелами тела $\mathbb{O}$, изоморфными телу $\mathbb{H}$. Эти плоскости называются *специальными плоскостями*.

Из симметрических римановых пространств с некомпактными группами движений отметим гиперболические пространства H^{2n} и H^{2n-1} с группами движений классов B_n и D_n, эрмитовы гиперболические про-

странства $\mathbb{C}H^n$ и $\mathbb{H}\overline{H}^{n-1}$ с группами движений классов A_n и C_n, и эрмитовы гиперболические плоскости $\mathbb{O}\overline{H}^2$, $\mathbb{CO}\widetilde{H}^2$, $\mathbb{HO}\widetilde{H}^2$ и $\mathbb{O}^2\widetilde{H}^2$ с группами движений классов F_4, E_6, E_7 и E_8, а также многообразие мнимых гиперквадрик пространства P^n, многообразие мнимых эрмитовых гиперквадрик пространства $\mathbb{H}P^{(n-1)/2}$, многообразие эллиптических нуль-конгруэнций прямых пространства Sy^{2n-1} и многообразие двумерных эллиптических специальных плоскостей G-псевдоэллиптического пространства Sg_3^6 с группами движений классов A_n, C_n и G_2.

Нуль-конгруэнция прямых пространства Sy^{2n-1} состоит из прямых, пересекающих две вещественные или мнимо сопряженные $(n-1)$-мерные нуль-плоскости в соответственных точках этих нуль-плоскостей. В случае мнимых нуль-плоскостей соответственные точки мнимо сопряжены, в случае вещественных нуль-плоскостей всякой точке M одной из них соответствует точка M' пересечения другой нуль-плоскости с гиперплоскостью, отвечающей точке M в абсолютной нуль-системе пространства. Нуль-конгруэнция, определяемая мнимыми нуль-плоскостями, называется эллиптической, а определяемая вещественными нуль-плоскостями называется гиперболической.

Пространство Sg_3^6 определяется с помощью алгебры $\mathbb{O}'$ антиоктонионов аналогично пространству Sg^6. Некомпактная простая группа G_2 является группой автоморфизмов алгебры $\mathbb{O}'$. Если ввести в эту алгебру метрику пространства R_4^8, в которой расстояние между антиоктонионами x и y равно модулю $|y-x|$ их разности, то автоморфизмы этой алгебры изображаются вращениями пространства R_4^8 вокруг точки 0, переводящими в себя вещественную ось этой алгебры. Поэтому автоморфизмы алгебры $\mathbb{O}'$ переводят в себя гиперплоскость, проходящую через точку 0 перпендикулярно вещественной оси, и 6-сферу радиуса 1 с центром в точке 0, лежащую в этой гиперплоскости. Отождествляя диаметрально противоположные точки этой 6-сферы, мы получим псевдоэллиптическое пространство S_3^6. Группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{O}'$ транзитивна на пространстве S_3^6. Пространство S_3^6, если считать его фундаментальной группой эту группу автоморфизмов, называется *G-псевдоэллиптическим пространством* и обозначается Sg_3^6. Образами симметрии пространства Sg_3^6 являются двумерные плоскости, получаемые при отождествлении диаметрально противоположных точек 6-сферы из ее пересечений с подалгебрами алгебры $\mathbb{O}'$, изоморфными алгебрам H и H'. Эти плоскости называются *специальными плоскостями*.

В пространстве Sg^6 специальные плоскости являются эллиптическими плоскостями, а в пространстве Sg_3^6 — гиперболическими.

Абсолюты симметрических пространств

В работе [107] Картан, рассматривая некомпактное симметрическое пространство, допускающее интерпретацию в виде многообразия мнимых гиперквадрик пространства P^n, отметил, что это симметрическое пространство обладает *абсолютом*, изображаемым *веронезеаной*

$$z^{ij} = x^i x^j \tag{6.40}$$

в пространстве P^N, точки которого определяются координатами $a^{ij} = a^{ji}$, откуда видно, что $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Точки пространства P^N с координатами a^{ij} изображают гиперквадрики $\sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} x^i x^j = 0$ при $a_{ij} = a^{ij}$. Точки веронезеаны изображают вырожденные гиперквадрики, являющиеся парами совпавших гиперплоскостей. Точки пространства P^N, изображающие вырожденные гиперквадрики пространства P^n других видов — гиперконусы второго порядка с точечными, прямолинейными и плоскими вершинами и пары пересекающихся гиперплоскостей, образуют подмногообразия пространства P^N, которые можно назвать *суперабсолютами* симметрического пространства, изображаемого многообразиями невырожденных гиперквадрик пространства P^n.

Абсолютные гиперквадрики гиперболических пространств H^{2n} и H^{2n-1}, абсолютные эрмитовы гиперквадрики эрмитовых гиперболических пространств $\mathbb{C}\bar{H}^n$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n$ и абсолютные эрмитовы коники эрмитовых гиперболических плоскостей $\mathbb{O}\bar{H}^2$, $\mathbb{CO}\tilde{\bar{H}}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{H}}^2$ можно рассматривать как абсолюты соответствующих римановых симметрических пространств.

В случае пространств S^n_k и H^n_k, $\mathbb{C}\bar{S}^n_k$, $\mathbb{C}\bar{H}^n_k$, $\mathbb{H}\bar{S}^n_k$ и $\mathbb{H}\bar{H}^n_k$ абсолютные гиперквадрики и эрмитовы гиперквадрики этих пространств являются абсолютами соответствующих псевдоримановых симметрических пространств, а многообразия прямолинейных и m-мерных плоских образующих этих гиперквадрик составляют суперабсолюты псевдоримановых симметрических пространств, изображаемых многообразиями прямых и m-мерных плоскостей указанных пространств. В этих случаях точки абсолютов и суперабсолютов симметрических пространств изображаются не образами симметрии, а параболическими образами соответствующих пространств.

В случае компактных симметрических пространств с компактными группами движений можно считать, что абсолюты и суперабсолюты этих пространств мнимы.

Геометрия подгрупп Картана

В работе [103] Картан изучал геометрические свойства важнейших классов симметрических римановых и псевдоримановых пространств, являющихся групповыми пространствами компактных и комплексных простых групп Ли.

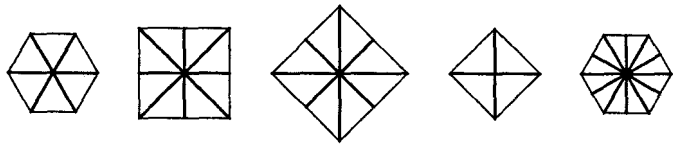
Наиболее подробно рассматривалась геометрия подгрупп Картана этих групп, которые сам Картан называл «подгруппами γ». Эти подгруппы являются вполне геодезическими поверхностями в простых группах Ли с их метрикой Картана, такими, что всякая геодезическая линия лежит в одной из этих подгрупп, и для всякой геодезической линии, состоящей из регулярных элементов группы, такая подгруппа Картана единственна, так как все элементы этой подгруппы перестановочны с элементами геодезической линии.

В силу коммутативности подгрупп Картана все структурные константы этих подгрупп равны 0.

Поэтому в случае компактных простых групп Ли метрика их подгрупп Картана локально евклидова. Эта локально евклидова метрика определяет в подалгебре Картана компактной простой группы Ли ранга n метрику полного евклидова пространства R^n.

Подгруппы Картана в указанной метрике изометричны выпуклым многогранникам с отождествленными точками их граней. Рассматривая такой многогранник и соединяя одну из его вершин линиями с другими вершинами, отождествляемыми с этой вершиной, а затем непрерывно деформируя эти линии, Картан нашел замкнутые контуры в рассматриваемой подгруппе, не переводимые друг в друга этими деформациями. Эти замкнутые контуры образуют группу, называемую *группой связности* или *группой Пуанкаре* подгруппы Картана. Картан доказал, что этой группе связности изоморфна и группа связности всей односвязной компактной простой группы Ли. Он установил также, что эта группа связности, являющаяся коммутативной конечной группой, изоморфна также ядру гомоморфизма односвязной компактной простой группы Ли в ее присоединенную группу. Найденные Картаном *индексы связности* односвязных простых групп Ли совпадают с индексами симметрии расширенных диаграмм Дынкина соответствующих комплексных групп Ли и с определителями матриц Картана этих групп.

В работе [103] рассматриваются сферическая и аффинная группы Вейля и находятся фундаментальные области этих групп, называемые в настоящее время «камерами Вейля» и «альковами Вейля».



A_2 B_2 C_2 D_2 G_2

a) b) c) d) e)

Рис. 6.2

В этой же работе доказано, что кратчайшие замкнутые геодезические линии подгрупп Картана компактных простых групп Ли в указанной метрике определяются корневыми векторами этих групп. На рис. 6.2 а—е изображены эти геодезические линии для групп ранга 2.

Подмногообразия Картана симметрических пространств

В работе [107] определены подмногообразия симметрических римановых пространств, аналогичные подгруппам Картана компактных простых групп Ли. Если симметрическое пространство изображается вполне геодезической поверхностью в группе Ли с ее метрикой Картана, то ее пересечение с подгруппой Картана называется *подмногообразием Картана* симметрического пространства. Так как это подмногообразие — пересечение двух вполне геодезических поверхностей, оно само является вполне геодезической поверхностью как группы, так и симметрического пространства. Из свойств подгрупп Картана следует, что всякая геодезическая линия симметрического риманова пространства лежит в одном из таких подмногообразий и в основном случае она лежит в единственном подмногообразии Картана, а также что метрика этих подмногообразий локально евклидова. Размерность подмногообразий Картана называется *рангом* симметрического риманова пространства; она равна числу метрических инвариантов пары точек этого пространства.

В работе [107] Картан нашел ранги всех неприводимых симметрических римановых пространств с простыми группами движений.

Симметрическими римановыми пространствами ранга 1 являются пространства S^n и H^n и пространства V^{2n}, V^{4n} и V^{16}, изометричные пространствам $\mathbb{C}\bar{S}^n$, $\mathbb{C}\bar{H}^n$, $\mathbb{H}\bar{S}^n$, $\mathbb{H}\bar{H}^n$ и плоскостям $\mathbb{O}\bar{S}^2$ и $\mathbb{O}\bar{H}^2$. Геодезические линии симметрических римановых пространств V^{2n}, V^{4n} и V^{16}, изометричных комплексным и кватернионным пространствам и октонионным плоскостям, находятся на вполне геодезических поверхностях этих пространств, изображающих вещественные, комплексные и октонион-

ные прямые. Все геодезические линии симметрических римановых пространств, изометричных эллиптическим пространствам, замкнуты и имеют одну и ту же длину в каждом из этих пространств. Геодезические линии симметрических римановых пространств, изометричных гиперболическим пространствам, бесконечны.

Ранг симметрических римановых пространств BDI, AIII и CII, моделями которых являются многообразия m-мерных плоскостей пространств S^n, $\mathbb{C}\bar{S}^n$ и $\mathbb{H}\bar{S}^n$ при $m \leqslant n - m - 1$, равен $m + 1$. Подмногообразия Картана этих симметрических пространств изображают семейства m-мерных плоскостей, пересекающихся с $m + 1$ взаимно полярными прямыми. Так как такие семейства соответствуют по принципу двойственности проективных пространств P^n, $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{H}P^n$ конгруэнциям $(n - m - 1)$-мерных плоскостей, эти семейства называются *коконгруэнциями*; в данном случае они называются *коконгруэнциями Картана*. Геодезические линии указанных симметрических пространств изображают однопараметрические семейства m-мерных плоскостей, называемые *m-геликоидами*. В случае многообразия прямых пространства S^3 эти семейства являются линейчатыми геликоидами. Прямые, с которыми пересекаются m-мерные плоскости коконгруэнций Картана и m-геликоидов, называются их *осями*. Плоские образующие m-геликоидов пространства S^n отсекают на их осях пропорциональные отрезки. Плоские образующие m-геликоидов пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n$ и $\mathbb{H}\bar{S}^n$ отсекают пропорциональные отрезки на геодезических линиях их осей.

Ранг симметрических пространств EII, EVI и EVIII, моделями которых являются плоскости $\mathbb{CO}\tilde{\bar{S}}^2$, $\mathbb{HO}\tilde{\bar{S}}^2$ и $\mathbb{O}\tilde{\bar{S}}^2$, равен соответственно 2, 4 и 8. Прямые этих плоскостей допускают интерпретации соответственно в виде многообразия прямых пространства S^9, многообразия трехмерных плоскостей пространства S^{11} и многообразия семимерных плоскостей пространства S^{15}. Геодезические линии этих симметрических пространств находятся на вполне геодезических поверхностях этих пространств, изображающих прямые указанных плоскостей, и изображаются соответственно линейчатыми геликоидами, 3-геликоидами и 7-геликоидами.

Аналогичные значения ранга и интерпретации имеют место для симметрических римановых пространств, моделями которых являются многообразия m-мерных эллиптических плоскостей пространств S^n_{m+1}, $\mathbb{C}\bar{S}^n_{m+1}$ и $\mathbb{H}\bar{S}^n_{m+1}$ и плоскостей $\mathbb{CO}\tilde{\bar{H}}^2$, $\mathbb{HO}\tilde{\bar{H}}^2$ и $\mathbb{O}^2\tilde{\bar{H}}^2$.

Антиподные многообразия симметрических пространств

В заметке [96] рассматривались геодезические линии в односвязных компактных простых группах Ли с метрикой Картана; дана классифи-

кация этих линий и определены *точки-антиподы*, т. е. такие точки, которые можно соединить бесконечным множеством геодезических линий. В случае односвязной компактной простой группы Ли класса A_n, изометричной гиперсфере пространства R^4, точки-антиподы изображаются диаметрально противоположными точками гиперсферы.

Антиподным многообразием точки называется многообразие точек-антиподов этой точки. Теорию антиподных многообразий в односвязных компактных простых группах Ли Картан развил в работе [103]. Он показал, что в случае, когда ранг такой группы равен n, каждая точка этой группы обладает n антиподными многообразиями, некоторые из которых состоят только из одной точки-антипода.

Антиподные многообразия можно определить также в неодносвязных компактных простых группах Ли и в симметрических римановых пространствах, группами движений которых являются компактные простые группы Ли. В случае гиперсфер пространств R^{n+1} каждая точка имеет единственную точку-антипод. В пространствах S^n точки не имеют антиподов. В случае пространств $\mathbb{C}\bar{S}^n$ и $\mathbb{H}\bar{S}^n$ и плоскости $\mathbb{O}\bar{S}^2$ антиподными многообразиями точек являются их полярные гиперплоскости или прямые.

В случае симметрических пространств, моделями которых являются многообразия m-мерных плоскостей пространств S^n, $\mathbb{C}\bar{S}^n$ и $\mathbb{H}\bar{S}^n$ при $m \leqslant n - m - 1$, антиподными многообразиями точек являются многообразия таких точек, которые изображают m-мерные плоскости, лежащие в полярных $(n - m - 1)$-мерных плоскостях тех m-мерных плоскостей, образами которых являются данные точки.

Ортогональные системы функций на симметрических пространствах

В 1927 г. Г. Вейль и Ф. Петер опубликовали статью «Полнота примитивных представлений компактных непрерывных групп» [PeW], в которой было доказано, что все неприводимые представления компактных групп Ли всегда можно получить с помощью ортогональных систем функций, заданных на этих группах. В этой статье было найдено представление бесконечномерного гильбертова пространства $L_2(G)$ вещественных или комплексных функций $f(t)$ с интегрируемым квадратом модуля, заданных на компактной группе Ли G, в виде прямой суммы конечномерных пространств ортогональных или унитарных представлений этой группы. Это представление является обобщением классического разложения периодической функции в ряд Фурье. Рассмотрение такой функции с периодом 2π равносильно рассмотрению функции $f(t)$ на компактной груп-

пе $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, где $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ — аддитивные группы вещественных и целых чисел, и разложение такой функции в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_k a_k \cos kt + \sum_k b_k \sin kt \tag{6.41}$$

равносильно представлению гильбертова пространства $L_2(\mathbb{T})$ в виде прямой суммы прямой линии и двумерных плоскостей «векторных диаграмм», векторы которых представляют функции $a_k \cos kt + b_k \sin kt$. Каждую из этих плоскостей можно рассматривать как плоскость комплексного переменного, на которой группа $\mathbb{T}$ представляется комплексными числами e^{ikt}. Эти представления называются *характерами* группы $\mathbb{T}$. Подобные характеры всякой коммутативной группы образуют группу характеров, единица которой является «единичным характером», в котором все элементы коммутативной группы представлены одним и тем же числом 1.

Согласно известной теореме Фробениуса [Фро], группы характеров конечных коммутативных групп изоморфны этим группам. В силу «закона двойственности» Л. С. Понтрягина [Пон2] группы характеров бесконечных дискретных коммутативных групп являются компактными коммутативными группами, группы характеров которых, в свою очередь, являются бесконечными дискретными коммутативными группами; группы характеров локально компактных коммутативных групп локально компактны.

В частности, группа характеров группы $\mathbb{T}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$, группа характеров группы $\mathbb{Z}$ изоморфна группе $\mathbb{T}$, а группа характеров группы $\mathbb{R}$ изоморфна ей самой.

В работе [117] Картан построил аналогичную теорию для функций, определенных на компактном симметрическом римановом пространстве E; эти функции образуют гильбертово пространство $L_2(E)$. Пространства $L_2(G)$ и $L_2(E)$ являются бесконечномерными аналогами комплексного эрмитова евклидова пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$, где роль векторов играют комплексные функции $f(x)$, а роль скалярного произведения играет интеграл

$$(f, g) = \int_E f(x)\bar{g}(x)\, dV, \tag{6.42}$$

где dV — элемент объема симметрического пространства или группы, а роль квадрата модуля вектора играет интеграл

$$|f|^2 = \int_E |f(x)|^2\, dV. \tag{6.43}$$

Если ax — точка симметрического пространства E, получаемая из точки x этого пространства применением к ней движения a этого про-

странства, то преобразование

$$T_a f(x) = f(ax) \tag{6.44}$$

является линейным преобразованием пространства $L_2(E)$. Так как группа, рассматриваемая Картаном, компактна, это линейное преобразование расщепляется на конечномерные преобразования вида

$$f_i(ax) = \sum_j a_i^j f_j(x). \tag{6.45}$$

Картан называл последовательности функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$, определяющих такие преобразования, *фундаментальными последовательностями функций*. Картан показал, что функции этих последовательностей можно выбрать ортогональными, т. е. удовлетворяющими условию $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$. Таким образом может быть построена бесконечная ортогональная система функций на симметрическом пространстве. Если мы разложим произвольную функцию $f(x)$ пространства $L_2(E)$ по этим функциям в виде конечного ряда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i(x), \tag{6.46}$$

то коэффициенты a_i этого разложения обладают тем свойством, что сумма ряда из их квадратов равна интегралу

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^2 = \int_E |f(x)|^2 \, dV = |f|^2. \tag{6.47}$$

Функции $f_i(x)$ фундаментальных последовательностей аналогичны функциям $\cos kt$ и $\sin kt$, определяющим ряд Фурье, которые образуют систему ортогональных функций на группе $\mathbb{T}$.

Корни и веса конечномерных линейных представлений полупростых групп Ли являются характерами подгрупп Картана этих групп. Картан определил также «зональные функции» на симметрических пространствах, аналогичные сферическим функциям пространства R^3.

Топология симметрических пространств

Во всех упомянутых нами выше работах Картана, в которых рассматриваются топологические свойства групп Ли, эти теории всегда представляют собой частные случаи общих исследований симметрических римановых пространств. Это относится к работам [103], [111], [154], а также к работе [118].

В работе «О топологических свойствах комплексных квадрик» [137] Картан рассмотрел $2n$-мерное симметрическое риманово пространство, которое может быть представлено гиперквадрикой пространства $\mathbb{C}P^{n+1}$. Если ввести в это пространство метрику пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{n+1}$, то гиперквадрика становится римановым пространством V^{2n}. Картан показал, что это пространство является симметрическим пространством, допускающим интерпретацию в виде многообразия прямых пространства S^{n+1}, так как каждая прямая пространства S^{n+1} пересекает абсолют этого пространства, который является гиперквадрикой пространства $\mathbb{C}P^{n+1}$, в двух мнимо сопряженных точках. Картан вычислил группы Бетти этого пространства.

Вычисление групп Бетти односвязных компактных групп Ли в работах [111] и [154] опирается на то, что эти группы являются симметрическими римановыми пространствами. В работе [118] это вычисление сводится к чисто алгебраической задаче в алгебре Ли компактной простой группы.

По аналогии с теорией гомологий алгебр Ли, построенной Картаном, Г. П. Хохшильд в работе [Hoc], С. Эйленберг и С. Маклейн в работе [EM] и К. Шевалле и Эйленберг в работе [ChE] разработали теории когомологий для произвольных алгебр, групп и коммутативных колец.

Все аспекты этой теории были изложены Анри Картаном и Эйленбергом в книге «Гомологическая алгебра» [CaE].

Редуктивные и параболические пространства

Симметрические пространства являются частными случаями *редуктивных пространств* — однородных пространств G/K, удовлетворяющих только первым двум соотношениям (2.59). Эти пространства были определены Петром Константиновичем Рашевским (1907—1983) в работе [Раш3] под названием «симметрические пространства с кручением». Приведенное выше определение этих пространств и название «редуктивные пространства» были предложены Номидзу в работе [Nom].

С симметрическими пространствами тесно связаны также *параболические пространства* — однородные пространства G/P, где G — простая группа Ли, а P — ее параболическая подгруппа. Параболические пространства были определены в работе [Ti3] Ж. Титсом под названием «R-пространства»; эти пространства называют также «флаговыми многообразиями». Название «параболические пространства» было введено в работе [РЗТ]. Параболические пространства допускают модели в виде многообразий параболических образов однородных пространств с простыми фундаментальными группами.

Важным частным случаем параболических пространств являются пространства G/B, где B — подгруппа Бореля группы G.

Группы изотропии симметрических и параболических пространств

Группы изотропии симметрических римановых пространств V^N, найденные Картаном в работе [94], являются группами O_N вращений пространств R^N, касательных к пространству V^N, в случае, когда V^N — пространство постоянной кривизны, и подгруппами группы O_N в общем случае. Поэтому группы изотропии пространства V^N переводят в себя бесконечно удаленные гиперплоскости пространств R^N, являющиеся пространствами S^{N-1}. В общем случае группы изотропии не транзитивны в пространствах S^{N-1}, а переводят в себя некоторые поверхности этих пространств, называемые *локальными абсолютами* пространства V^N.

Рассмотрим группы изотропии и локальные абсолюты компактных симметрических римановых пространств. Пространства типа BDII являются эллиптическими пространствами S^{2n} и S^{2n-1}, их группы изотропии — группы O_{2n+1} и O_{2n}. *Пространства V^N типа BDI при $N = (m+1)(n-m)$* допускают модели в виде многообразия m-мерных плоскостей пространства S^n. Группа изотропии этого пространства изоморфна прямому произведению групп движений m-мерной плоскости и ее полярной $(n-m-1)$-мерной плоскости, т. е. групп O_{m+1} и O_{n-m}. Пространство $V^{(m+1)(n-m)}$ изометрично $(m+1)(n-m)$-мерному *грассманиану* в эллиптическом пространстве $\binom{n+1}{m+1}$ измерений, уравнениями которого являются условия, связывающие грассмановы координаты $p^{i_0 i_1 \dots i_m}$ m-мерных плоскостей пространства S^n. Локальными абсолютами этого пространства являются *сегреаны* $\sigma_{m,n-m-1}$.

Сегреана $\sigma_{m,n}$, определенная Коррадо Сегре (1863—1924) в работе [Se2], представляет собой алгебраическую поверхность

$$Z^{i\alpha} = x^i y^\alpha \tag{6.48}$$

в пространстве P^{mn+m+n} (здесь x^i и y^α — координаты точек в пространствах P^m и P^n). Уравнения сегреаны в проективных координатах имеют вид

$$Z^{i\alpha} Z^{j\beta} = Z^{i\beta} Z^{j\alpha}. \tag{6.49}$$

При $m = n = 1$ сегреана является линейчатой квадрикой пространства P^3.

В случае пространства $V^{(m+1)(n-m)}$ локальные абсолюты являются сегреанами (6.49) в пространствах $S^{(m+1)(n-m)+1}$.

В случае симметрического пространства V^{2n} типа AIV, т. е. пространства $\mathbb{C}\bar{S}^n$, группа изотропии изоморфна прямому произведению группы движений пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{n-1}$ и группы D_1 движений прямой S^1. В этом случае группа изотропии переводит в себя паратактическую конгруэнцию прямых пространства S^{n-1}, изометричную пространству $\mathbb{C}\bar{S}^{n-1}$; группа D_1 — группа сдвигов вдоль прямых конгруэнции. Локальный абсолют в этом случае совпадает с фокальной поверхностью этой конгруэнции, т. е. состоит из двух мнимо сопряженных $(n-1)$-мерных плоскостей пространства S^{2n-1}.

В случае симметрического пространства V^{4n-4} типа CII при $l=1$, т. е. пространства $\mathbb{H}\bar{S}^{n-1}$, группа изотропии изоморфна прямому произведению группы движений пространства $\mathbb{H}\bar{S}^{n-2}$ и группы B_1 движений прямой $\mathbb{C}\bar{S}^1$. В этом случае группа изотропии переводит в себя паратактическую конгруэнцию прямых пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{2n-1}$, изометричную пространству $\mathbb{H}\bar{S}^{n-2}$; группа B_1 — группа сдвигов вдоль прямых конгруэнции. Локальный абсолют в этом случае совпадает с фокальной поверхностью этой конгруэнции, т. е. является мнимой сегреаной $\Sigma_{i,2n-1}$.

В случае симметрических пространств V^{16}, V^{32}, V^{64}, V^{128} типов FII, $EIII$, EVI и $EVIII$, т. е. плоскостей $\mathbb{O}\bar{S}^2$, $\mathbb{CO}\bar{\tilde{S}}^2$, $\mathbb{HO}\bar{\tilde{S}}^2$ и $\mathbb{O}^2\bar{\tilde{S}}^2$, группы изотропии изоморфны соответственно спинорной группе группы O_9, прямому произведению спинорной группы группы O_{10} и группы D_1, прямому произведению спинорной группы группы O_{12} и группы B_1 и спинорной группе группы O_{16}. Группы изотропии в этих случаях переводят в себя конгруэнции плоскостей в пространствах S^{15}, S^{31}, S^{63} и S^{127}, изометричные эрмитовым прямым над теми же алгебрами. Локальные абсолюты в этих случаях совпадают с фокальными поверхностями этих конгруэнций, являющимися мнимыми алгебраическими поверхностями.

Группы изотропии параболического пространства G/P являются параболическими подгруппами P группы G. В случае многообразий α_i-образов и α_n-образов пространства P^n группа изотропии изоморфна группе аффинных преобразований пространства E^n.

В случае многообразий α_i-образов и α_{n+1-i}-образов пространства P^n группа изотропии изоморфна группе квазиаффинных преобразований пространства $E^{i-1,n}$.

Группы изотропии пространств C^n и C^n_k изоморфны соответственно группам подобий пространств R^n и R^n_k.

Унитарные представления некомпактных групп Ли

Рассмотрение систем функций на однородных пространствах привело к появлению теории *унитарных представлений* некомпактных простых

и квазипростых групп Ли, т. е. представлений этих групп унитарными операторами в гильбертовых пространствах $L_2(E)$ функций на однородных пространствах E, фундаментальными группами которых являются рассматриваемые группы. Унитарные операторы в пространстве $L_2(E)$ со скалярным произведением (6.42) — это такие линейные операторы U этого пространства, которые удовлетворяют условию $(Uf, Ug) = (f, g)$. Эти операторы являются аналогами матриц группы $\mathbb{C}U_n$.

Первой работой, посвященной таким представлениям, была статья 1939 г. «Об унитарных представлениях неоднородной группы Лоренца» [Wig] физика Юджина Вигнера (1902—1997). В этой работе Вигнер построил унитарные представления квазипростой группы движений пространства R^4_1, т. е. пространства-времени специальной теории относительности.

В 1943 г. И. М. Гельфанд и Д. А. Райков (1905—1980) опубликовали статью «Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп» [ГеР], в которой была построена теория унитарных представлений для широкого класса локально компактных групп, в том числе групп Ли.

В 1947 г. в статье «Неприводимые унитарные представления группы Лоренца» [Bag] Валентина Баргмана (1908—1991) и в статьях с тем же названием [ГеН1] И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка и [Har1] Хариш-Чандры была построена теория унитарных представлений некомпактной простой группы Лоренца — группы вращений пространства R^4_1.

Так как группа Лоренца локально изоморфна группе $\mathbb{C}SL_2$, являющейся ее спинорной группой, Гельфанд поставил общую задачу изучения бесконечномерных унитарных представлений всех классических комплексных простых групп Ли, рассматриваемых как некомпактные вещественные простые группы Ли. Теория унитарных представлений этих групп была изложена Гельфандом и Наймарком в книге [ГеН2]. Позднее Гельфанд и Граев в статье [ГеГ] решили более сложную аналогичную задачу для всех вещественных простых групп Ли бесконечных серий.

Хариш-Чандра, независимо от Гельфанда, построил аналогичную теорию в серии статей «Представления полупростых групп Ли» [Har2].

Гельфанд и его сотрудники и Хариш-Чандра рассматривали гильбертовы пространства $L_2(E)$ комплексных функций, заданных на параболических пространствах E, фундаментальными группами которых являются некомпактные простые и полупростые группы Ли.

Главная серия унитарных представлений некомпактной группы G строилась с помощью параболического пространства G/B, где B — подгруппа Бореля группы G. Другие серии этих представлений строятся

с помощью параболических пространств G/P, где P — произвольные параболические подгруппы группы G.

В случае группы Лоренца, изоморфной группе движений пространства H^3, за многообразие E можно принять абсолют пространства H^3, представляемый плоскостью комплексного переменного, на которой движения пространства H^3 изображаются дробно-линейными преобразованиями.

Выше мы видели, что корни и веса конечномерных линейных представлений полупростых групп Ли являются характерами подгрупп Картана этих групп. В случае бесконечномерных представлений этих групп роль характеров их подгрупп Картана играют *обобщенные функции*, которые являются линейными функционалами на гильбертовых пространствах. Эти обобщенные функции, как и характеры локально компактных коммутативных групп, образуют локально компактные коммутативные группы, являющиеся прямыми произведениями нескольких бесконечных дискретных групп $\mathbb{Z}$ и нескольких групп $\mathbb{R}$. Элементы групп $\mathbb{Z}$ определяют целочисленные параметры унитарных представлений, а элементы групп $\mathbb{R}$ определяют вещественные параметры этих представлений.

В случае комплексной простой группы Ли ранга n максимальная компактная подгруппа является компактной группой того же класса и ранга, а подгруппа Картана представляет собой прямое произведение n групп $\mathbb{T}$ и n групп $\mathbb{R}$. Поэтому группа характеров подгруппы Картана в этом случае является прямым произведением n групп $\mathbb{Z}$ и n групп $\mathbb{R}$, и унитарные представления такой группы определяются n целочисленными и n вещественными параметрами.

В случае произвольной вещественной некомпактной группы имеется несколько неизоморфных подгрупп Картана, каждая из которых определяет серию унитарных представлений группы. Если подгруппа Картана является прямым произведением l групп $\mathbb{T}$ и m групп $\mathbb{R}$, то группа ее характеров — прямое произведение l групп $\mathbb{Z}$ и m групп $\mathbb{R}$, и унитарные представления этой группы определяются l целочисленными и m вещественными параметрами.

В случае, когда подалгебра Картана компактна, т. е. является прямым произведением n групп $\mathbb{T}$, ее группа характеров представляет собой прямое произведение n групп $\mathbb{Z}$, и имеются только дискретные серии унитарных представлений, определяемые n целочисленными параметрами.

Теория унитарных представлений квазипростых групп Ли аналогична теории унитарных представлений некомпактных простых групп Ли.

Аналоги классических сферических функций в симметрических пространствах, изучение которых было начато Картаном в работе [117], тесно

связаны с унитарными представлениями компактных и некомпактных групп Ли. Мы видели, что функции $\cos kt$ и $\sin kt$, где k — целое число, определяют представления группы $\mathbb{T}$, изоморфной группе вращения плоскости R^2. Аналогично, гиперболические функции $\operatorname{ch} pt$ и $\operatorname{sh} pt$, где p — вещественный параметр, определяют представления группы вращений плоскости R^2_1. Сферическими функциями пространства R^3 являются *полиномы Лежандра* $P_n(\cos\theta)$, где θ — широта точки на сфере, а n — целое число. Сферическими функциями пространства R^3_1 являются *гипергеометрические функции* $P_p(\cos\theta)$, где θ — аналог широты точки на сфере, а p — вещественный параметр. Аналогами сферических функций для плоскости R^2_1 являются *функции Бесселя* $J_0(pr)$, где r — первая полярная координата точки на плоскости, а p — вещественный параметр. Аналогичные теории для многих симметрических пространств с компактными и некомпактными полупростыми и квазипростыми фундаментальными группами были построены И. М. Гельфандом в работе [Gel].

В книге «Специальные функции и теория представлений групп» [Вил] Наум Яковлевич Виленкин показал, что все классические специальные функции можно рассматривать как элементы матриц бесконечного порядка, определяемых линейными операторами представлений простых и квазипростых групп Ли.

k-симметрические пространства

Симметрические римановы пространства являются частными случаями однородных пространств, с каждой точкой которых связан не инволютивный автоморфизм фундаментальной группы пространства, а *периодический автоморфизм* Φ, k-я степень которого Φ^k является тождественным преобразованием. Эти пространства были впервые определены Артюром Леджером (р. 1926) в работе [Led] «Обобщенные симметрические пространства». В. И. Ведерников в работах [Вед1], [Вед2] рассматривал эти пространства под названием «однородные Φ-пространства».

Наиболее важны редуктивные пространства, обладающие этим свойством и называемые *k-симметрическими* или *периодическими пространствами*. Эти пространства изучались О. Ковальским и А. Г. Феденко в книгах [Ков] и [Фед2] и Б. П. Комраковым, А. Леджером и М. Обатой, Н. А. Степановым, Дж. А. Вольфом и А. Греем, Б. А. Розенфельдом и М. П. Замаховским в статьях [Ком], [LeO], [Стп], [WG] и [RoZ].

В случае, когда автоморфизмы Φ, связанные с точками k-симметрического пространства, являются внутренними автоморфизмами фундаментальной группы G этого пространства, пространство называется *k-симметрическим пространством внутреннего типа*; в случае, ко-

гда автоморфизмы Φ — внешние автоморфизмы группы G, пространство называется *k-симметрическим пространством внешнего типа*.

Полная классификация k-симметрических пространств внутреннего типа была проведена М. П. Замаховским в работе [RoZ]. Он доказал, что если алгебра Ли $\mathbf{G}$ простой группы Ли G записана в виде (3.58), то прямая сумма $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}_{-h} + \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_h$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathbf{G}$; подалгебры $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}^0$ являются алгебрами Ли подгрупп G_0 и G^0 группы G, и однородные пространства G/G_0 и G/G^0 являются соответственно $(h+1)$-симметрическим и h-симметрическим пространствами.

При $h = 1$ подалгебры $\mathbf{G}^0$ совпадают с алгебрами Ли $\mathbf{G}$. Поэтому при $h = 1$ со всяким параболическим пространством связано симметрическое пространство G/G_0. В частности, в пространстве P^n с многообразием m-мерных плоскостей связано многообразие пар, состоящих из m-мерной и $(n-m-1)$-мерной плоскостей; в пространстве S_n^{2n-1} с семействами $(n-1)$-мерных плоских образующих абсолютной гиперквадрики связаны многообразия паратактических конгруэнций прямых; а в пространстве Sy^{2n-1} с многообразием $(n-1)$-мерных нуль-плоскостей связано многообразие нуль-конгруэнций прямых.

Из теоремы Замаховского следует также, что при $h > 1$ со всяким параболическим пространством связано одно h-симметрическое и одно $(h+1)$-симметрическое пространства.

Если разложение (3.58) определяется простым корнем α_i, то число h в формуле (3.58) равно коэффициенту m_i при α_i в разложении максимального корня $\mu = \sum\limits_k m_k\alpha_k$. Если разложение (3.58) определяется простыми корнями $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$, то число h в формуле (3.58) равно сумме $m_{i_1} + m_{i_2} + \ldots + m_{i_k}$ коэффициентов m_{i_k} при α_{i_k} в разложении максимального корня $\mu = \sum\limits_k m_k\alpha_k$.

Для пространств G/G^0 Замаховский доказал, что стационарные подгруппы точек этих пространств являются полупростыми группами Ли, диаграммы Дынкина которых получаются из расширенных диаграмм Дынкина групп G удалением точек, изображающих простые корни α_i или $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ (см. рис. 2.9). Для пространств G/G_0 Замаховский доказал, что стационарные подгруппы точек этих пространств локально изоморфны прямым произведениям коммутативных групп D_1 на полупростые группы Ли, диаграммы Дынкина которых получаются из обычных диаграмм Дынкина групп G удалением точек, изображающих простые корни α_i или $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ (см. рис. 2.2 и 2.5).

В частности, симметрическое пространство типа FI является пространством G/G_0, определяемым простым корнем α_1; симметрическое пространство типа FII является пространством G/G_0, определяемым простым корнем α_4; симметрическое пространство типа EI является пространством G/G^0, определяемым простыми корнями α_1 и α_5; симметрическое пространство типа EII является пространством G/G^0, определяемым простым корнем α_6; симметрическое пространство типа EIII является пространством G/G_0, определяемым простым корнем α_1 или α_5; симметрическое пространство типа EIV является пространством G/G^0, определяемым простыми корнями α_1 или α_5 и $-\mu$. Симметрическое пространство типа EV является пространством G/G^0, определяемым простым корнем α_7; симметрическое пространство типа EVI является пространством G/G^0, определяемым простым корнем α_6; симметрическое пространство типа EVII является пространством G/G_0, определяемым простым корнем α_1; симметрическое пространство типа EVIII является пространством G/G^0, определяемым простым корнем α_7; симметрическое пространство типа EIX является пространством G/G^0, определяемым простым корнем α_1.

Внешние автоморфизмы простых групп Ли рассматривались Картаном в работах [9] и [82]. Этими автоморфизмами обладают только простые группы Ли классов A_n, D_n и E_6, для которых группы Галуа Γ не совпадают с их группами Вейля W, и факторгруппы Γ/W состоят из 2 и $3! = 6$ элементов. Эти автоморфизмы связаны с двусторонней и трехсторонней симметриями диаграмм Дынкина групп классов A_n, D_n и E_6 и с принципами двойственности и тройственности пространств с этими фундаментальными группами. В случае двусторонней симметрии диаграмм Дынкина внешний автоморфизм σ является инволютивным, т. е. σ^2 является тождественным преобразованием; в случае трехсторонней симметрии диаграммы Дынкина (см. рис. 2.6) внешний автоморфизм σ обладает тем свойством, что σ^3 является тождественным преобразованием.

Подгруппы групп A_n, D_n и E_6, состоящие из элементов, инвариантных при внешних автоморфизмах этих групп, являются группами Ли, диаграммы Дынкина которых получаются из диаграмм Дынкина групп A_n, D_n и E_6 при отождествлении точек этих диаграмм, соответствующих при их симметриях.

Отождествляя в группе Ли класса A_{2n} точки, изображающие простые корни α_i и α_{2n+i-1}, мы получим диаграмму Дынкина группы Ли класса A_n.

Отождествляя в группе Ли класса A_{2n-1} точки, изображающие простые корни α_i и α_{2n-i}, мы получим диаграмму Дынкина группы Ли класса C_n.

Отождествляя в группе Ли класса D_n точки, изображающие простые корни α_{n-1} и α_n, мы получим диаграмму Дынкина группы Ли класса B_{n-1}.

Отождествляя в группе Ли класса E_6 точки, изображающие простые корни α_1 и α_5, α_2 и α_4, мы получим диаграмму Дынкина группы Ли класса F_4.

Отождествляя в группе Ли класса D_4 точки, изображающие простые корни α_1, α_3 и α_4, мы получим диаграмму Дынкина группы Ли класса G_2.

Образами симметрии, соответствующими внешним автоморфизмам групп A_{2n}, A_{2n+1}, D_n и E_6, являются n-мерные плоскости пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{2n}$, паратактические конгруэнции прямых пространства $\mathbb{C}\bar{S}^{2n+1}$, гиперплоскости пространства S^{2n-1} и нормальные октонионные 2-цепи плоскости $\mathbb{CO}\bar{S}^2$. Образами 3-симметрии, соответствующими внешнему автоморфизму группы D_4, являются гиперплоскости пространства S^7 с геометрией пространства Sg^6.

Глава 7

Обобщенные пространства

«Аффинные связности» и «метрические многообразия» Вейля

Мы уже отмечали, какую важную роль в развитии римановой геометрии сыграло открытие А. Эйнштейном общей теории относительности, согласно которой пространство-время и гравитационное поле материи описываются четырехмерным псевдоримановым пространством V_1^4, кривизна которого связана с плотностью распределения материи. Исключительную роль для создания дальнейших обобщений понятия пространства сыграла поставленная Эйнштейном задача построения *единой теории поля*. Эйнштейн исходил из представления о том, что вся физика сводится к механике и электродинамике, гравитационное поле материи уже учитывается геометрией пространства V_1^4, и для описания единой теории физического поля следует построить такую более общую пространственную схему, которая наряду с гравитационным полем описывала бы также электромагнитное поле. В специальной и общей теории относительности Эйнштейна электромагнитное поле, определявшееся в классической электродинамике полями вектора $\boldsymbol{E}$ напряженности электрического поля и вектора $\boldsymbol{H}$ напряженности магнитного поля, характеризуется единым кососимметрическим тензором F^{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ электромагнитного поля, координаты которого связаны с векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и скоростью света c соотношениями

$$F^{4i} = -F^{i4} = cE^i, \quad F^{21} = -F^{12} = H^3, \quad F^{13} = -F^{31} = H^2, \quad F^{32} = -F^{23} = H^1.$$

Первой попыткой построения более общей геометрии, чем риманова или псевдориманова, которая описывала бы наряду с гравитационным полем материи также электромагнитное поле, была геометрия Вейля, созданная Г. Вейлем в его статье «Чистая инфинитезимальная геометрия» [Wey1].

В этой работе Вейль различает три типа многообразий — «многообразие-место» (situs-Mannigfalttigkeit), которое он отождествлял с «пустым миром», т. е. с миром без материи, «аффинно-связное многооб-

разие» (affin zusammenhangende Mannigfalttigkeit), под которым Вейль понимал многообразие с параллельным переносом векторов (он называл его «миром с гравитационным полем»), и «метрическое многообразие», которое он называл также «эфиром» и под которым он понимал «мир» с гравитационным и электромагнитным полями. «Аффинно-связное многообразие» Вейля по существу совпадает с пространством-временем общей теории относительности Эйнштейна, т. е. с псевдоримановым пространством. Под «метрическим» же многообразием Вейль понимал обобщение риманова и псевдориманова пространств, состоящее в том, что если в пространствах V^n и V_l^n при параллельном переносе векторов происходит изометрическое отображение касательных пространств $T_x(V^n)$ и $T_x(V_l^n)$ на касательные пространства в бесконечно близких точках, то в «метрических многообразиях» Вейля эти отображения — преобразования подобия (т. е. при этих отображениях сохраняются углы между векторами, а линейные размеры умножаются на вещественные числа).

Те же идеи Вейль изложил в своей книге «Пространство, время, материя» [Wey2], первое издание которой вышло в том же 1918 г., за этим изданием последовал ряд переизданий (пятое — в 1923 г.), книга была переведена на французский в 1922 г., а затем и на английский язык и получила широкую популярность во всем мире*) (в этой книге была изложена знаменитая векторно-точечная аксиоматика n-мерных аффинного и евклидова пространств E^n и R^n).

Хотя Эйнштейн занимался проблемой построения единой теории поля в течение нескольких десятков лет, ни ему, ни другим физикам не удалось построить такую теорию. Напротив, по мере развития физики открывались новые виды взаимодействия материи («слабое взаимодействие», «сильное взаимодействие»), которые не сводились ни к механическому, ни к электромагнитному взаимодействию. Однако для развития многомерной дифференциальной геометрии импульс, полученный ею от физиков, пытавшихся построить единую теорию поля, оказался весьма плодотворным.

Пространства аффинной связности

Введенный Вейлем термин «аффинно-связное многообразие» вскоре получил более широкий смысл, чем ему придавал Вейль, и стал применяться к таким пространствам A^n, касательные пространства $T_x(A^n)$ к которым являются аффинными пространствами E_1^n, причем для каждых

*) На русском языке эта книга опубликована в 1996 г.

двух касательных пространств в бесконечно близких точках определено аффинное отображение одного из них на другое. Такие пространства определил Я. А. Схоутен, который пришел к ним, обобщая открытый им одновременно с Леви-Чивитой параллельный перенос векторов в римановом пространстве. Поэтому Схоутен называл отображение касательных пространств E^n пространства A^n *перенесением* (Übertragung); эти пространства он определил в работе «О различных перенесениях, которые могут быть положены в основу дифференциальной геометрии» [Sch1]. Теория Схоутена была подробно изложена в его книге «Исчисление Риччи» [Sch2] (как мы упоминали, «исчисление Риччи» — одно из названий тензорного исчисления). Схоутен определял пространство A^n как многообразие с координатами x_i, в каждой точке которого заданы функции $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, преобразующиеся при преобразованиях координат по тому же закону, что символы Кристоффеля риманова пространства, однако не выражающиеся по формулам (6.10) через метрический тензор g_{ij}. Поэтому в общем случае в пространстве A^n нельзя определить длины линий и величины углов между линиями, но можно определить *геодезические линии*, являющиеся интегральными кривыми дифференциальных уравнений (6.9). При этом параметр s, для которого эти дифференциальные уравнения сохраняют свой вид, определен с точностью до «аффинного преобразования» $s \to as + b$, вследствие чего этот параметр называется *аффинным параметром* геодезических линий.

К каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства A^n присоединяется касательное пространство $T_{\boldsymbol{x}}(A^n)$, являющееся аффинным пространством E^n, аналогичное касательным пространствам $T_{\boldsymbol{x}}(V^n)$ и $T_{\boldsymbol{x}}(V^n_l)$. Как и в пространствах V^n и V^n_l, в пространстве A_n определяются контравариантные и ковариантные векторы a^i и a_i и тензоры $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. С помощью функций Γ^i_{jk} в пространстве A^n определяется параллельный перенос векторов и тензоров по тем же формулам (6.18), (6.19) и (6.20), что и в пространствах V^n и V^n_l.

Несколько более общее определение пространства аффинной связности было дано Картаном в статьях [66], [69] и [80]. Книга [208] содержит русские переводы статей Картана о пространствах аффинной, проективной и конформной связности. В начале статьи [66] Картан писал, что термин «аффинная связность» заимствован из книги Вейля [Wey2], но «в этом мемуаре ему придан более широкий смысл». Мы будем обозначать пространства аффинной связности Картана тем же символом A^n, что и пространство Схоутена. Картан, как и Схоутен, определял аффинное отображение касательного пространства $T_{\boldsymbol{x}}(A^n)$ на касательное пространство $T_{\boldsymbol{x}'}(A^n)$ в бесконечно близкой точке, но аффинное отобра-

жение Картана является более общим, чем отображение Схоутена. Для определения отображения Картан рассматривает репер $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i\}$ в пространстве $T_{\boldsymbol{x}}(A^n)$ и репер $\{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{e}'_i\}$ в пространстве $T_{\boldsymbol{x}'}(A^n)$ и задает главную часть отображения соотношениями $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$, $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i + d\boldsymbol{e}_i$, где $d\boldsymbol{x} = \sum_i \omega^i \boldsymbol{e}_i$, $d\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_i^j \boldsymbol{e}_j$. Эти формулы по виду в точности совпадают с деривационными формулами (5.5) репера $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i\}$ аффинного пространства E^n, однако теперь они не будут вполне интегрируемыми, как для пространства E^n, так как входящие в них формы ω^i и ω_j^i удовлетворяют уравнениям структуры пространства аффинной связности

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \sum_k \omega^k \wedge \omega_k^i + \sum_j \sum_k S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \\ d\omega_i^j &= \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \sum_k \sum_i R_{i,kl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned} \tag{7.1}$$

которые сложнее формул (6.25). В формулах (7.1) S_{jk}^i — *тензор кручения*, а $R_{i,kl}^j$ — *тензор кривизны* пространства A^n. Теперь деривационные формулы (5.5) допускают интегрирование только вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, принадлежащей A^n, и их одномерные интегралы определяют «развертки» пространства аффинной связности A^n на аффинное пространство E^n.

В том случае, когда векторы $\boldsymbol{e}_i$ образуют натуральный репер на A^n, т. е. когда $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и $\omega^i = dx^i$, формы ω_j^i, определяющие на A^n аффинную связность, имеют вид $\omega_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i \, dx^k$. Коэффициенты Γ_{jk}^i называются *коэффициентами аффинной связности*; в отличие от аналогичных коэффициентов Схоутена здесь не предполагается соотношения $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, и возникает тензор

$$S_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i, \tag{7.2}$$

называемый *тензором кручения*. В этом случае имеется и *тензор кривизны*

$$R_{j,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \sum_h \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \sum_h \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i, \tag{7.3}$$

определяемый по формуле, аналогичной формуле (6.12) для вычисления тензора Римана пространств V^n и V_l^n.

В случае, когда $S_{jk}^i = 0$, пространство A^n называется *пространством без кручения*, а в случае, когда $R_{j,kl}^i = 0$, — *пространством без кривизны*. Так как в пространствах V^n и V_l^n имеет место равенство $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$,

эти пространства можно рассматривать как пространства аффинной связности без кручения, а аффинное пространство E^n является пространством A^n без кривизны и кручения. Так же как и в случае пространств V^n и V_l^n, результат параллельного переноса вектора $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$ по замкнутому контуру, определяемому в окрестности точки $\boldsymbol{x}$ пространства A^n дифференциалами координат dx^j и δx^j, отличается от исходного вектора $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$ приращением, равным вектору с координатами $R^i_{j,kl} a^j\, dx^k\, \delta x^l$. Вектор с координатами $S^i_{jk} dx^j \delta x^k$ определяет незамкнутость в касательном пространстве $T_x(A^n)$ пути, соответствующего этому замкнутому контуру, при его развертке. В этом состоит геометрический смысл тензоров кривизны и кручения пространства аффинной связности A^n.

Пространства евклидовой, изотропной и метрической связности

Картан определил пространства аффинной связности во второй главе своей работы [66]. В первой главе этой работы Картан анализировал пространство-время общей теории относительности, рассматривая его как пространство «псевдоевклидовой связности», касательные пространства которого являются псевдоевклидовыми пространствами R^4_1. В этой главе Картан рассматривал также пространство-время классической механики Галилея—Ньютона «с точки зрения теории Эйнштейна», т. е. он рассматривал это пространство-время как пространство «изотропной связности», касательные пространства которого являются изотропными пространствами I^4. Картан не ввел этого понятия, но записал преобразования пространственных координат и времени при переходе от одной инерциальной системы пространства-времени классической механики к другой, а эти преобразования совпадают с преобразованиями координат пространства I^4.

В третьей главе той же работы [66] Картан определил пространства метрической и евклидовой связности. По аналогии с термином Г. Вейля «метрические многообразия» Картан называл пространствами метрической связности такие пространства A^n, касательные пространства $T_x(A^n)$ которых являются псевдоевклидовыми пространствами R^4_1, в которых действует группа преобразований подобия. При этом формы ω^i_i равны между собой (эти формы Картан обозначал ω), а формы ω^j_i при $i \neq j$ связаны теми же соотношениями, что и в случае группы движений пространства R^4_1.

Уравнения структуры пространств метрической связности, как и в случае общих пространств A^n, имеют вид (7.1). Отображения касательных пространств R^n и R^n_l этого пространства на касательные пространства в бесконечно близких точках являются преобразованиями подобия. Част-

ный случай пространства метрической связности, при котором форма ω тождественно равна нулю, т. е. когда отображения касательных пространств этого пространства на касательные пространства в бесконечно близких точках являются изометрическими отображениями, Картан называл *пространствами евклидовой связности*.

Картан употреблял термины «метрическая связность» и «евклидова связность» для пространств A^n, касательными пространствами которых являются как пространства R^n, так и пространства R^n_l.

Римановы и псевдоримановы пространства V^n и V^n_l являются частными случаями «пространств евклидовой связности», у которых тензор кручения S^i_{jk} тождественно равен нулю. То же условие выделяет среди пространств метрической связности «метрические многообразия» Вейля, называемые в настоящее время *пространствами со связностью Вейля*.

Статьям Картана [66], [69] и [80] предшествовали заметки, посвященные попыткам построения единой теории поля. В заметке [58] Картан определил пространство евклидовой связности с кручением, а в работе «Об обобщенных пространствах и теории относительности» [59] он определил пространство метрической связности и предложил характеризовать пространство-время как такое пространство, касательные пространства которого являются псевдоевклидовыми пространствами R^4_1.

В работе «Недавние обобщения понятия пространства» [171] Картан привел простейший пример пространства евклидовой связности: сферу, на которой параллельный перенос касательных векторов определен таким образом, что переносимый и перенесенный векторы составляют равные углы с меридианами, проходящими через их начала; при этом геодезическими линиями являются локсодромы. Так как такой параллельный перенос не зависит от пути переноса, он является *абсолютным параллелизмом*. Этот же пример Картан привел в письме к А. Эйнштейну 8 мая 1929 г., написанном в связи с тем, что Эйнштейн независимо от Картана в 1928 г. пришел к понятию абсолютного параллелизма и пытался его применить в своей единой теории поля. Этим письмом началась интенсивная переписка Картана с Эйнштейном об абсолютном параллелизме, опубликованная в сборнике [210].

Аффинные связности в группах Ли и симметрические пространства аффинной связности

Первоначально понятия связности создавались Схоутеном и Картаном независимо друг от друга. В 1926 г. появились две их совместные работы «О геометрии группового многообразия простых и полупростых

групп» [91] и «О римановых геометриях, допускающих абсолютный параллелизм» [92]. Обе статьи в основном относятся к римановой геометрии, но в них так или иначе затрагивается геометрия пространств аффинной связности. В первой из этих статей рассматриваются три аффинные связности в группах Ли, называемые (−)-связностью, (+)-связностью и (0)-связностью. Указывается, что в случае простых и полупростых групп Ли (0)-связность определяется римановой или псевдоримановой метрикой Картана в этой группе. В работе [92] рассматриваются два вида абсолютного параллелизма в полупростых группах Ли, определяемые соотношениями

$$'Y\,'X^{-1} = YX^{-1} \quad \text{и} \quad 'X^{-1}\,'Y = X^{-1}Y, \tag{7.4}$$

где X, Y, $'X$, $'Y$ — элементы группы. Эти абсолютные параллелизмы связаны с (−)-связностями и (+)-связностями в этих группах.

В работе [92] рассматривается также бесконечное множество абсолютных параллелизмов в эллиптическом пространстве S^7, получаемом из гиперсферы $|\alpha| = 1$ в алгебре $\mathbb{O}$ октонионов с метрикой пространства R^8 при отождествлении диаметрально противоположных точек этой гиперсферы. Этими абсолютными параллелизмами являются преобразования, определяемые соотношениями

$$'Y('X^{-1}A) = Y(X^{-1}A) \quad \text{и} \quad (A'X^{-1})\,'Y = (AX^{-1})Y, \tag{7.5}$$

где X, Y, $'X$, $'Y$, A — октонионы единичного модуля. Каждый октонион A определяет два абсолютных параллелизма (7.5).

Точно такой же вид (7.4) имеют абсолютные параллелизмы в любой группе Ли. Эти параллелизмы определяют две аффинные связности без кривизны в любой некоммутативной группе Ли.

Две аффинные связности без кривизны и аффинная связность без кручения в любой некоммутативной группе Ли подробно описаны в статье Картана [101]. Здесь аффинные связности без кривизны называются «абсолютными параллелизмами первого и второго рода». Параллельный перенос векторов в этих связностях определяется отображениями окрестностей элементов X на окрестности элементов $'X$ с помощью сдвигов (7.4). Так как эти отображения не зависят от пути, соединяющего X и $'X$, вектор, получаемый переносом по замкнутому контуру в обеих этих связностях, совпадает с исходным вектором, откуда видно, что эти связности — без кривизны. В то же время эти связности обладают кручением, причем при абсолютном параллелизме первого рода координаты тензора кручения S^i_{jk} связаны со структурными константами c^i_{jk} группы Ли соотношениями

$S^i_{jk} = \frac{1}{2}c^i_{jk}$, а при абсолютном параллелизме второго рода — соотношениями $S^i_{jk} = -\frac{1}{2}c^i_{jk}$.

Третья связность, определенная Картаном на группе Ли, также инвариантна при преобразованиях группы, это связность без кручения, она определяется своими геодезическими линиями и их аффинным параметром. Роль геодезических линий, проходящих через единицу группы, играют однопараметрические подгруппы, а роль аффинного параметра — их канонический параметр t, при котором произведение элементов $x(t_1)$ и $x(t_2)$ подгруппы совпадает с элементом $x(t_1 + t_2)$ — этот параметр определен с точностью до ненулевого множителя. Роль геодезических линий, не проходящих через единицу группы, играют классы смежности по однопараметрическим подгруппам, а роль аффинного параметра на этих классах смежности играет канонический параметр подгруппы; этот аффинный параметр определен с точностью до «аффинного преобразования» $t \to at + b$. Тензор кривизны этого пространства аффинной связности выражается через структурные константы c^i_{jk} группы по той же формуле (6.30), что и тензоры кривизны римановой или псевдоримановой метрик в простых и полупростых группах Ли, определяемых формой Киллинга—Картана на этих группах. Отсюда видно, что в этих группах аффинная связность Картана без кручения определяется инвариантной римановой или псевдоримановой метрикой (6.29) в этих группах.

Аффинная связность без кручения в группах Ли, определенная Картаном в статье [101], является частным случаем аффинной связности симметрического пространства. Так же как и в случае римановых симметрических пространств, Картан доказал, что необходимым и достаточным условием, чтобы пространство аффинной связности без кручения было симметрическим пространством, является условие $\nabla_h R^i_{j,kl} = 0$, аналогичное условию (6.28). Эти пространства можно реализовать в группах Ли в виде вполне геодезических поверхностей $\sigma_0\sigma$, проходящих через единицу группы, где σ — отражение от произвольной точки пространства аффинной связности, а σ_0 — отражение от некоторой фиксированной точки этого пространства. Так же как и в случае симметрических римановых и псевдоримановых пространств, алгебра Ли группы Ли, порождаемой отражениями σ, допускает «разложение Картана» (2.57), где подалгебра **K** является алгеброй Ли группы изотропии этого пространства, а подпространство **E** можно рассматривать как касательное пространство к вполне геодезической поверхности в группе, на которой реализуется симметрическое пространство аффинной связности,

или, что равносильно этому, как касательное пространство к этому симметрическому пространству. Тензор кривизны симметрического пространства аффинной связности выражается через структурные константы c^a_{uv} и c^z_{aw} группы, порождаемой отражениями σ, по той же формуле (6.32), что и в случае римановых и псевдоримановых пространств.

В симметрических пространствах аффинной связности, так же как и в римановых симметрических пространствах, определена структура квазигруппы О. Лооса [Loo], которая ставит в соответствие всяким двум точкам x и y этого пространства точку z — отражение точки x относительно точки y по геодезическим линиям этой аффинной связности. Касательные пространства к симметрическим пространствам аффинной связности, так же как и касательные пространства к симметрическим римановым пространствам, замкнуты относительно операции $[[XY]Z]$ и, следовательно, являются *тройными системами Ли*.

«Изотропная связность» Картана является частным случаем *r-квазиевклидовой связности*. Л. М. Карпова [РК] доказала, что в каждой квазипростой группе Ли можно определить инвариантную геометрию квазиевклидовой связности, частным случаем которой является геометрия Бляшке [Bla1] пространства $S^{1,3}$ в группе движения плоскости R^2.

Редуктивные пространства как симметрические пространства с кручением

В главе 6 мы определили, следуя К. Номидзу [Nom], редуктивные пространства как однородные пространства G/K, удовлетворяющие только первым двум соотношениям (2.59), и указали, что эти пространства впервые были определены П. К. Рашевским [Раш3] как пространства аффинной связности, в которых ковариантно постоянен не только тензор кривизны ($\nabla_h R^i_{j,kl} = 0$), но и тензор кручения ($\nabla_h S^i_{jk} = 0$), вследствие чего он называл эти пространства «симметрическими пространствами с кручением».

Эквивалентность определений Рашевского и Номидзу вытекает из того, что если базис алгебры Ли $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{E}$ состоит из векторов $\boldsymbol{e}_i$ подалгебры $\mathbf{K}$ и векторов $\boldsymbol{e}_\alpha$ подпространства $\mathbf{E}$, то уравнения структуры группы G имеют вид

$$[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j]=\sum_k c^k_{ij}\boldsymbol{e}_k, \quad [\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_\alpha]=\sum_\beta c^\beta_{i\alpha}\boldsymbol{e}_\beta, \quad [\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta]=\sum_i c^i_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_i+\sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\gamma. \tag{7.6}$$

Структурные константы $c^\gamma_{\alpha\beta}$ совпадают с координатами тензора кручения $S^\gamma_{\alpha\beta}$ пространства.

В том случае, когда группа изотропии редуктивного пространства компактна, это пространство является пространством евклидовой связности, определенным Картаном в работе [66].

Пространства проективной связности

В работе [70] Картан, по аналогии с пространствами аффинной связности A^n, определил *пространства проективной связности* B^n как n-мерные многообразия, с каждой точкой x которых связано «касательное» пространство $T_x(B^n)$, являющееся пространством P^n, причем каждой паре бесконечно близких точек x и x' пространства B соответствует проективное отображение пространств $T_x(B^n)$, являющееся аналогом параллельного переноса векторов пространства A^n. Деривационные формулы для проективных реперов в пространствах B^n имеют тот же вид (5.8), что и в пространстве P^n, но уравнения структуры пространств B^n отличаются от уравнений (5.13) и имеют более сложный вид

$$\begin{gathered} d\omega_i^j = \sum_h \omega_i^h \wedge \omega_h^j + \frac{1}{2}\sum_k \sum_l A_{i,kl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \\ h, i, j = 0, 1, \ldots, n, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{7.7}$$

где $\omega^k = \omega_k^0$. Тензор $A_{i,kl}^j$, являющийся аналогом тензора кривизны пространства A^n, называют *тензором проективной кривизны*. В случае, когда тензор $A_{i,kl}^j$ тождественно равен нулю, Картан называл пространство B^n *голономным пространством*. В настоящее время такие пространства называются *проективно плоскими*. Внешние квадратичные формы $\sum_k \sum_l A_{i,kl}^j \omega^k \wedge \omega^l$ Картан обозначал Ω_i^j. Так же как в случае пространства P^n, бесконечно малое смещение реперов в пространстве B^n определяется формами ω_i^j. Формы Ω^i Картан называл, по аналогии с формами $\Omega^i = \sum_j \sum_k S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$ пространства A^n, *формами кручения*, и в случае $\Omega^i = 0$ пространство проективной связности называл «пространством без кручения».

В пространстве B^n, как и в пространстве A^n, определяются геодезические линии, при бесконечно малых смещениях вдоль которых сохраняется их направление. Однако, в отличие от пространства A^n, на геодезических линиях пространств B^n нельзя определить аффинный параметр.

Ту роль, которую среди пространств A^n играют римановы и псевдоримановы пространства, среди пространств B^n играют *нормальные пространства* проективной связности — пространства без кручения, обладающие свойством $\sum_k A_{k,ij}^k = 0$, вполне определяемые своей системой

геодезических линий. Нормальные пространства B^n связаны с проблемой геодезического отображения римановых пространств, т. е. такого отображения одного пространства V^n на другое, при котором геодезические линии переходят в геодезические линии. Для решения этой задачи для римановых пространств строятся нормальные проективные связности, определяемые их геодезическими линиями. Эквивалентность этих связностей равносильна наличию геодезических отображений одного из пространств на другое пространство.

Пространства конформной связности

В работе [68] Картан, также по аналогии с пространствами аффинной связности A^n, определил *пространства конформной связности* D^n как n-мерные многообразия, с каждой точкой x которых связано «касательное» пространство $T_x(D^n)$, являющееся пространством C^n, причем каждой паре бесконечно близких точек x и x' пространства D^n соответствует конформное отображение пространств $T_x(D^n)$, являющееся аналогом параллельного переноса векторов пространства A^n. Деривационные формулы для конформных реперов в пространствах D^n имеют тот же вид (5.8), что и в пространстве C^n, и формы ω_i^j связаны теми же уравнениями (5.10), но уравнения структуры пространств D^n отличаются от уравнения (5.13) и имеют более сложный вид

$$d\omega_i^j = \sum_h \omega_i^h \wedge \omega_h^j + \frac{1}{2}\sum_k \sum_l A_{i,kl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \qquad (7.8)$$
$$h, i, j = 0, 1, \ldots, n+1, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n+1,$$

где тензор $A_{i,kl}^j$, являющийся аналогом тензора кривизны пространства A^n, называют *тензором конформной кривизны*. В случае, когда тензор $A_{i,kl}^j$ тождественно равен нулю, Картан называл пространство D^n пространством без кривизны, или *голономным пространством*. В настоящее время такие пространства называются *конформно плоскими*. Внешние квадратичные формы $A_{i,kl}^j \omega^k \wedge \omega^l$ Картан обозначал Ω_i^j. Так же как и в случае пространства C^n, бесконечно малое смещение реперов в пространстве D^n определяется формами ω_i^j. Формы Ω^i Картан называл, по аналогии с формами $\Omega^i = \sum_j \sum_k S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$ пространства A^n, *формами кручения*, а пространство конформной связности D^n, в случае $\Omega^i = 0$, называл *пространством без кручения*.

Среди пространств D^n также определяются *нормальные пространства* — пространства без кручения, в которых $\sum_k A_{k,ij}^k = 0$, играющие

роль, аналогичную роли пространств V^n и V_l^n среди пространств A^n. Теория нормальных пространств D^n связана с теорией конформных отображений римановых пространств, т. е. отображений этих пространств, сохраняющих углы между линиями. Линейные элементы ds в соответственных точках этих пространств отличаются множителем. Картан подробно рассматривал трехмерные нормальные пространства конформной связности. Он также построил теорию подмногообразий пространств D^n.

Пространства конформной связности впервые рассматривались в заметке Картана [60] под названием «Обобщенные конформные пространства». В этой заметке эти пространства связывались с проблемой «оптической вселенной». Хорошо известно, что конформные преобразования пространства-времени играют важную роль в специальной теории относительности, так как уравнения Максвелла инвариантны не только при преобразованиях Лоренца, т. е. при вращениях пространства R_1^4, и при преобразованиях Пуанкаре, т. е. при движениях пространства R_1^4, но и при конформных преобразованиях пространства C_1^4; последнее пространство может быть получено из пространства R_1^4 добавлением бесконечно удаленной точки и идеальных точек. В заметке [60] Картан пытался построить аналогичную конформную теорию для общей теории относительности. Несомненно, что эта попытка была главным стимулом для построения Картаном теории конформной связности. Впоследствии по аналогии с этой теорией он в работе [70] построил теорию пространств проективной связности. Фактически в заметке [60] Картан определил пространство D_1^4 псевдоконформной связности. Он называл это пространство «оптической вселенной», так как считал, что световые лучи распространяются по изотропным линиям этого пространства; эти линии вещественны в пространстве D_1^4 и мнимы в пространстве D^4.

Пространства симплектической связности. Эрмитовы римановы и келеровы пространства

Важные применения в теории дифференциальных уравнений и теоретической механике получила геометрия *пространств симплектической связности* Vy^{2n}, часто называемая просто «симплектической геометрией». Пространства Vy^{2n} представляют собой пространства A^{2n}, касательные пространства E^{2n} которых обладают бесконечно удаленными гиперплоскостями с геометрией симплектических пространств Sy^{2n-1}. Такие пространства E^{2n} называются *симплектическими пространствами* Sy^{2n}. Поэтому в каждой точке пространства Vy^{2n} задан кососимметрический тензор $g_{ij} = -g_{ji}$ или внешняя дифференциальная

форма $\omega = \sum_i \sum_j g_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$. Наиболее важны те из этих пространств, в которых форма ω замкнута, т. е. внешний дифференциал $d\omega$ этой формы равен нулю. Применение этого пространства к механике основано на том, что механическую систему, заданную обобщенными координатами q^i и обобщенными импульсами p_i, можно рассматривать как пространство с замкнутой внешней дифференциальной формой $\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i$. Подмногообразия размерности n этого пространства, касательные n-мерные плоскости которых высекают из бесконечно удаленных гиперплоскостей касательных пространств $T_x(Vy^{2n})$ $(n-1)$-мерные нуль-плоскости пространств Sy^{2n-1}, называют *лагранжевыми подмногообразиями* этих пространств. Это название объясняется тем, что шестимерное пространство такого типа по существу изучалось еще Ж. Л. Лагранжем в «Мемуаре о теории вариаций элементов планет и, в частности, вариаций больших осей их орбит» [Lag2], в котором рассматривались возмущения движения планет вокруг Солнца под влиянием внешних сил. Лагранж исходил из того, что планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, и возмущенное движение планеты обладает тем же свойством. Поэтому Лагранж определял возможное движение планеты плоскостью, проходящей через Солнце, большой осью эллипса и положением планеты на этом эллипсе. Шесть определенных таким образом «элементов планет» рассматривались как координаты точек шестимерного пространства, в котором Лагранж переходил к координатам q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3.

П. К. Рашевский применил пространства симплектической связности к исследованию более широкого класса дифференциальных уравнений, чем уравнения механики, в книге [Раш2], где он называл эти пространства «пространствами линейной формы четного класса». Геометрию пространства симплектической связности широко применял Виктор Павлович Маслов (р. 1930) в своей книге [Мас], в которой был введен термин «лагранжевы подмногообразия».

Пространства Vy^{2n} тесно связаны с комплексными эрмитовыми аналогами римановых и псевдоримановых пространств V^n и V^n_l. Эти пространства являются комплексными дифференцируемыми многообразиями $\mathbb{C}X^n$, в которых задан комплексный эрмитов тензор $e_{ij} = \bar{e}_{ji}$. В том случае, когда дифференциальная эрмитова форма $ds^2 = \sum_i \sum_j e_{ij}\, dx^i\, d\bar{x}^j$ положительно определенная, пространство называется *эрмитовым римановым* и обозначается $\mathbb{C}\overline{V}^n$. Если эта форма знаконеопределенная

индекса l, пространство называется *эрмитовым псевдоримановым индекса l* и обозначается $\mathbb{C}\bar{V}_l^n$.

Пространства $\mathbb{C}\bar{V}^n$ и $\mathbb{C}\bar{V}_l^n$ были определены Я. А. Схоутеном в работе «Об унитарной геометрии» [Sch3]; он называл эти пространства «унитарными».

Пространство $\mathbb{C}\bar{V}^n$ с координатами $z^i = x^{2i-1} + ix^{2i}$ изометрично вещественному риманову пространству V^{2n} с координатами x^{2i-1} и x^{2i}. Пространство $\mathbb{C}\bar{V}_l^n$ изометрично вещественному псевдориманову пространству V_{2l}^{2n}. Мнимая часть билинейной формы $\sum_i \sum_j e_{ij}\, dx^i d\bar{x}^j$ является внешней дифференциальной формой ω, инвариантной при параллельном переносе в пространствах $\mathbb{C}\bar{V}^n$ и $\mathbb{C}\bar{V}_l^n$. Поэтому эрмитовы римановы и псевдоримановы пространства $\mathbb{C}\bar{V}^n$ и $\mathbb{C}\bar{V}_l^n$ являются также пространствами Vy^{2n}.

Если в этом пространстве Vy^{2n} форма ω замкнута, то пространства $\mathbb{C}\bar{V}^n$ и $\mathbb{C}\bar{V}_l^n$ называются соответственно *келеровым* и *псевдокелеровым* и обозначаются $\mathbb{C}\bar{K}^n$ и $\mathbb{C}\bar{K}_l^n$. Пространство $\mathbb{C}\bar{K}^n$ было определено Эрихом Келером (р. 1906) в работе «Об одной замечательной эрмитовой метрике» [Kah1].

Заметим, что эрмитовы евклидово, эллиптическое и гиперболическое пространства $\mathbb{C}\bar{R}^n$, $\mathbb{C}\bar{S}^n$, и $\mathbb{C}\bar{H}^n$ являются частными случаями пространства $\mathbb{C}\bar{K}^n$.

Работы Картана по физике

Мы указывали на исключительную роль общей теории относительности Эйнштейна в развитии геометрии римановых и псевдоримановых пространств и попыток создания единой теории поля в развитии теории пространств аффинной связности и других обобщенных пространств Картана. Поэтому естественно, что целый ряд работ Картана посвящен теории физических полей.

Картан заинтересовался проблемами общей теории относительности еще до того, как занялся теорией обобщенных пространств. Еще в 1922 г. Картан написал статью «Об уравнениях гравитации Эйнштейна» [56], в которой исследовал уравнения общей теории относительности с помощью своей теории уравнений Пфаффа в инволюции, составил систему уравнений Пфаффа, равносильную системе уравнений Эйнштейна, подсчитал характеры этой системы и показал, что она является системой в инволюции, и нашел, что общее решение этой системы существует с произволом $n(n-1)/2$ произвольных функций n вещественных аргументов, т. е. в случае четырехмерного пространства-времени — с произволом 6 функций 4 аргументов.

В статьях [66], [69] и [80] после изложения геометрии пространства-времени классической механики и геометрии пространств аффинной, метрической и евклидовой связности и поверхностей в этих пространствах Картан в главе о «гравитационных вселенных» Ньютона и Эйнштейна нашел, какие из рассмотренных им связностей описывают свойства гравитационных и электромагнитных полей классической механики и общей теории относительности.

В работе [124] Картан указал, что идея абсолютного параллелизма, выдвинутая им еще в 1922 г., была открыта снова в 1928 г. Эйнштейном, который положил ее в основу новой единой теории поля, в которой тензор электромагнитного поля совпадает с тензором кручения пространства. Абсолютному параллелизму и основанной на нем единой теории поля посвящена также книга Картана [130].

В статье Картана «Единая теория Эйнштейна—Майера» [143a], написанной в 1934 г., но опубликованной только после смерти Картана, дается геометрически интуитивная интерпретация единой теории поля, предложенной Эйнштейном и Майером в 1931 г. В этой интерпретации пространство-время реализуется на вполне геодезической гиперповерхности пятимерного пространства евклидовой связности.

Финслеровы пространства

Другим обобщением риманова пространства является финслерово пространство, в котором линейный элемент или, как говорил Картан, расстояние между двумя бесконечно близкими точками $\boldsymbol{x}(x^i)$ и $\boldsymbol{x}'(x^i + dx^i)$ на многообразии X^n определяется формулой

$$ds = F(x^1, \ldots, x^n; dx^1, \ldots, dx^n), \tag{7.9}$$

где F — положительная функция, однородная степени один относительно $dx^1, \ldots, dx^n$. Это понятие возникло в связи с геометрической интерпретацией задачи вариационного исчисления для интеграла

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)\, dt, \tag{7.10}$$

где $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, и было впервые рассмотрено Паулем Финслером (1894—1970) в диссертации «О кривых на поверхностях в общих пространствах» [Fin]. Экстремали этого интеграла являются геодезическими линиями финслерова пространства.

Простейшее пространство этого вида было определено Германом Минковским (1864—1909) в статье «Теория выпуклых тел, с обоснованием понятия их поверхности» [Min]. Он рассматривал это пространство

как аффинное пространство E^n, в котором гиперсфера, определяющая метрику евклидова пространства R^n, заменена произвольной замкнутой центрально-симметричной выпуклой «калибровочной гиперповерхностью». Минковский показал, что если за расстояние между точками X и Y этого пространства принять отношение отрезка XY к параллельному ему отрезку OP, заключенному между центром O калибровочной гиперповерхности и точкой P этой гиперповерхности, то в этом пространстве будет выполнено неравенство треугольника $XY + YZ \geqslant XZ$.

Пространства Минковского являются касательными пространствами к финслеровым пространствам, так как функция F, стоящая под знаком интеграла (7.10), определяет калибровочные гиперповерхности

$$F(x^1, \ldots, x^n; \xi^1, \ldots, \xi^n) = 1, \tag{7.11}$$

где ξ^i — координаты касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$ в точке $\boldsymbol{x}$ финслерова пространства.

Финслерова геометрия получила дальнейшее развитие в работах Джона Лайтона Синджа (1897—1995) «Обобщение риманова линейного элемента» [Sy] и Людвига Бервальда (1883—1942) «О параллельном перенесении в пространствах с общим мероопределением» [Bew1], «О двумерных общих метрических пространствах» [Bew2]. В 1934 г. Бервальд в докладе «О финслеровых и родственных им пространствах» [Bew3] заменил расплывчатый термин «общие метрические пространства» применяемым в настоящее время термином «финслеровы пространства». Определение финслерова пространства как пространства со связностью, касательные пространства которого являются пространствами Минковского, дал Артур Винтерниц (1893—1940) в работе «Об аффинном основании метрики одной вариационной задачи» [Win].

В книге [142] и в докладе [152] Картан разработал новый подход к изучению финслеровых пространств. Он указал, что теория этих пространств может быть связана с общими проблемами эквивалентности. Такие проблемы часто имеют место в разных разделах дифференциальной геометрии. Такова, например, задача римановой геометрии о том, можно ли привести одну из двух дифференциальных форм к другой с одинаковым числом переменных с помощью замены переменных. Каждая из этих дифференциальных форм является метрической формой точечного пространства с римановой метрикой, и эквивалентность двух дифференциальных форм означает наложимость одного из этих пространств на другое. Картан отметил, что для установления эквивалентности двух финслеровых пространств следует рассматривать не только точечные пространства, но и многообразия линейных элементов

пространств с евклидовой связностью. Линейный элемент многообразия X^n состоит из точки $\boldsymbol{x}(x_i)$ этого многообразия и вектора $\dot{\boldsymbol{x}} = \{\dot{x}^i\}$ касательного пространства $T_{\boldsymbol{x}}(X^n)$ этого многообразия. Это пространство будет определено, если задать в нем выражение $\sum_i \sum_j g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ квадрата линейного элемента, где $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, и выражение абсолютного дифференциала $D\xi$ вектора $\xi = \{\xi^i(x^1, \ldots, x^n)\}$ имеет вид

$$D\xi^i = d\xi^i + \sum_h \sum_k \xi^k (\Gamma^i_{kh}\, dx^h + C^i_{kh} d\dot{x}^h). \tag{7.12}$$

Условие $D\xi^i = 0$ определяет параллельный перенос вектора в финслеровом пространстве. Среди всех пространств линейных элементов с евклидовой связностью требуется найти такое пространство, которое определялось бы однозначно функцией $F(x^1, \ldots, x^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, задающей расстояние между двумя бесконечно близкими точками в финслеровом пространстве. Для этого полагаем

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 F(x^1, \ldots, x^n; \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}, \qquad C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \tag{7.13}$$

где $C_{ijk} = \sum_h g_{ih} C^h_{jk}$. Тогда $\sum_k d\dot{x}^k C^i_{jk} = 0$ и $C_{ijk} = C_{jik}$. При этом условии параллельный перенос сохраняет длину $|\xi|$ переносимого вектора ξ; квадрат этой длины равен $|\xi|^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\xi^i\xi^j$.

Далее Картан распространил на финслерову геометрию тензорное исчисление и рассмотрел подмногообразия, погруженные в финслерово пространство.

Метрические пространства, основанные на понятии площади

В книге [140] Картан определил другое обобщение риманова пространства, в котором основным понятием является площадь поверхности.

Дифференциал площади поверхности $z = f(x, y)$ в трехмерном пространстве имеет вид

$$d\sigma = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx \wedge dy, \tag{7.14}$$

где функция F зависит от координат x, y, z точек и от величин $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, определяющих положение касательной плоскости к поверх-

ности $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y, z)$. Роль геодезических линий в этой геометрии играют поверхности, дающие экстремум интегралу $\iint d\sigma = \iint F\,dx \wedge dy$.

Для построения такой геометрии на n-мерном многообразии X Картан рассматривал множество «опорных элементов», состоящих из точек $\boldsymbol{x}$ многообразия X^n и $(n-1)$-мерных подпространств U в касательном пространстве $T_{\boldsymbol{x}}(X^n)$. Если в многообразии X^n выбрана система координат, то точка $\boldsymbol{x}$ определяется координатами x^i, а подпространство U — однородными координатами u_i. Квадрат расстояния между бесконечно близкими точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ Картан определял, как и в римановой геометрии, с помощью квадратичной формы $ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, но теперь коэффициенты g_{ij} этой формы зависят не только от координат x^i точки $\boldsymbol{x}$, но и от координат u_i подпространства U касательного пространства. Затем Картан определил абсолютный дифференциал $D\xi^i$ опорного элемента $\xi = \xi(\boldsymbol{x}, u)$ по формуле

$$D\xi^i = d\xi^i + \sum_k \sum_j \xi^k (C_k^{ij} du_j + \Gamma_{kj}^i\,dx^j). \tag{7.15}$$

Величины C_k^{ij} и Γ_{kj}^i определяют евклидову связность в пространстве опорных элементов.

Далее Картан показал, как построить евклидову связность в пространстве опорных элементов, которая была бы инвариантно связана с указанным выше элементом $d\sigma$ поверхности и с более общим элементом гиперповерхности n-мерного пространства. Построение этих евклидовых связностей применяется для решения проблемы эквивалентности кратных интегралов вида $\iint F(x, y, z, p, q)\,dx \wedge dy$ и аналогичных интегралов в n-мерном пространстве. Необходимое и достаточное условие эквивалентности двух таких интегралов состоит в том, что связанные с ними пространства евклидовой связности должны быть геометрически эквивалентными, т. е. между ними должно существовать такое точечное соответствие, а следовательно, и соответствие между их опорными элементами, что метрика и евклидова связность первого пространства при этом соответствии преобразуются в метрику и евклидову связность второго пространства.

Книга Картана [140] вызвала большое количество работ, посвященных геометрии кратных интегралов. Упомянем здесь, в частности, работу М. В. Ауссем (Васильевой) [Ау], в которой изучалась геометрия m-крат-

ного интеграла

$$\underbrace{\int \dots \int}_{m} F(x^1, \dots, x^n; p_1^{m+1}, \dots, p_m^n)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m, \qquad (7.16)$$

распространенного на m-мерную поверхность $x^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^m)$, где $p_i^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}$, $\alpha = m+1, \dots, n$, и работу Л. Е. Евтушика [Ев], в которой также рассматривается геометрия интеграла типа (7.16), где, однако, подынтегральная функция F зависит не только от координат x^i и x^α точки x и производных первого порядка $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}$, но также от производных высших порядков до некоторого порядка p. При этом Евтушик вместо классических тензорных методов применял инвариантный аппарат внешнего дифференциального исчисления, также идущий от Картана.

Проблемы эквивалентности и G-структуры

Мы упоминали о проблеме эквивалентности, когда говорили о работах Картана по теории финслеровых пространств. На самом деле эта проблема связана со всеми обобщенными пространствами Картана, а впервые Картан заинтересовался ею еще в 1902 г., задолго до того, как начал разрабатывать теорию обобщенных пространств.

В общем случае проблема эквивалентности формулируется следующим образом: пусть, с одной стороны, дана система n линейно независимых форм Пфаффа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ относительно независимых переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$ и m независимых функций $y^1, y^2, \dots, y^m$ от этих переменных, а с другой стороны — система n линейно независимых форм Пфаффа $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ от переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$ и m независимых функций $Y^1, Y^2, \dots, Y^m$ от этих переменных. Требуется выяснить, существует ли замена переменных, переводящая функции $y^1, y^2, \dots, y^m$ в функции $Y^1, Y^2, \dots, Y^m$ и обладающая тем свойством, что при этой замене переменных формы $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ получаются из форм $\omega_1, \omega_2, \dots$ $\dots, \omega_n$ линейной подстановкой, принадлежащей к некоторой линейной группе G, причем коэффициенты конечных преобразований этой группы могут зависеть от функций $y^1, y^2, \dots, y^m$.

Этой проблеме Картан посвятил заметки в 1902 г. «Об эквивалентности дифференциальных систем» [19] и в 1914 г. — «Об интегрировании некоторых систем дифференциальных уравнений» [40] и статьи «Об абсолютной эквивалентности некоторых систем дифференциальных уравнений и некоторых семействах кривых» [42] (1914), «О проблеме эквивалентности и теории обобщенных метрических пространств» [126]

(1930) и «Проблемы эквивалентности» [161а] (1937). Проблеме эквивалентности для различных групп G в значительной части посвящены также статьи Картана [26], [30] и [136, 136а].

Проблема эквивалентности тесно связана не только с обобщенными пространствами, но и с более общими расслоенными пространствами и G-структурами на гладких многообразиях.

Наиболее близки к обобщенным пространствам Картана расслоенные пространства, базами которых являются дифференцируемые многообразия X^n, а слоями — множества реперов $\{x, e_i\}$ в касательных пространствах $T_x(X^n)$ многообразия X^n, переводимых друг в друга преобразованиями подгруппы G группы GL_n. Подгруппа G называется «структурной группой» расслоенного пространства. Такие расслоенные пространства в настоящее время называют *G-структурами первого порядка*. Если заменить касательное пространство $T_x(X^n)$ пространством $T_x^k(X^n)$ k-х дифференциалов, то получится *G-структура k-го порядка*.

Примером G-структуры первого порядка является риманово пространство V^n. Оно определяется на многообразии C^n с помощью положительно определенной метрической квадратичной формы $ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. Эта форма выделяет в многообразии реперов касательного пространства $T_x(X^n)$ семейство ортонормированных реперов, в которых она принимает вид $ds^2 = \sum_i (\omega^i)^2$ и определяет группу $G = O_n$ ортогональных преобразований, переводящих это семейство в себя. Следовательно, риманово пространство представляет собой G-структуру первого порядка со структурной группой $G = O_n$. Точно так же псевдориманово пространство V_l^n является G-структурой первого порядка со структурной группой $G = O_{n,l}$ псевдоортогональных преобразований индекса l.

В том случае, когда слои можно отождествлять с некоторой группой G, расслоение называется *главным*. Важную роль в теории G-структур играет связность в главных расслоенных пространствах. Пусть X — база расслоения со слоями $F_x = G$ размерности r, образующими главное расслоение X^{n+r} размерности $n + r$. Пусть, далее, точка y принадлежит слою F_x и в касательном пространстве $T_y(X^{n+r})$ выделено n-мерное подпространство H_y, имеющее с касательным пространством V_y к слою F_x в точке y только одну общую точку y, так что $T_y(X^{n+r})$ является прямой суммой подпространств H_y и V_y. Эти подпространства, рассмотренные во всех точках y расслоения X^{n+r}, образуют соответственно горизонтальное и вертикальное распределения. Если распределение H_y дифференцируемо и инвариантно по отношению к действию группы G на расслоении X^{n+r}, то оно называется *связностью в главном расслоении*.

Оказывается, что рассмотренные выше пространства аффинной, проективной и конформной связности являются частными случаями связности в главном расслоенном пространстве; слои в этих случаях можно отождествить соответственно с группами аффинных, проективных и конформных преобразований пространств E^n, P^n и C^n. В частности, в случае пространства аффинной связности A^n горизонтальное распределение определяет параллельный перенос реперов вдоль некоторой кривой на базе.

Аффинная, проективная и конформная связности являются G-структурами первого порядка на соответствующем расслоенном пространстве X^{n+r}. Но обычно их рассматривают как G-структуры высших порядков на многообразиях X^n, причем для аффинной и конформной связностей порядок этой G-структуры равен 2, а для проективной связности он равен 3.

Понятие G-структуры впервые было сформулировано учеником Картана Ш. Эресманом в заметке «Расслоенные пространства совместимой структуры» [Eh2]; термин «G-структура» появился впервые в работе Ш. Чжэня «Бесконечные непрерывные псевдогруппы» [Chr3], в которой эти структуры связывались с псевдогруппами Ли, изучавшимися Картаном под названием «бесконечных непрерывных групп». Отметим также работу П. Либерман «О проблеме эквивалентности некоторых инфинитезимальных структур» [Lib1].

Важную роль в теории G-структур играют комплексные и почти комплексные структуры. Первые из этих структур определяются на комплексных многообразиях $\mathbb{C}X^n$; их структурные группы — группы $\mathbb{C}GL_n$. Многообразия $\mathbb{C}X^n$ допускают вещественные интерпретации в многообразиях X^{2n}, в касательных пространствах $T_x(X^{2n})$ которых задан оператор J комплексной структуры, соответствующий оператору iI в касательном пространстве $T_x(\mathbb{C}X^n)$. Оператор J удовлетворяет условию $J^2 = -1$. Структурная группа G состоит из аффинных вращений пространства $T_x(X^{2n})$, перестановочных с оператором J. Почти комплексная структура многообразия X^{2n} определяется операторами J комплексной структуры в касательных пространствах $T_x(X^{2n})$, однако, в отличие от комплексной структуры, почти комплексную структуру нельзя получить вещественной интерпретацией многообразия $\mathbb{C}X^n$. Задача определения того, является ли почти комплексная структура комплексной структурой, сводится к нахождению условий полной интегрируемости двух систем уравнений Пфаффа, определяющих мнимо сопряженные собственные пространства оператора J в касательном пространстве $T_x(X^{2n})$ многообразия X^{2n}. Это условие состоит в обращении в нуль *тензора Нейенхёйса* N^i_{jk}.

Аналогично определяются многообразия двойной и почти двойной структуры. Так как пространство $\mathbb{C}'X^n$ допускает интерпретацию в виде топологического произведения двух многообразий X^n, двойные и почти двойные структуры являются частными случаями «структур произведения» и «почти произведения». Структуры произведения многообразий X^n и X^m и почти произведения этих многообразий осуществляются в многообразиях X^{n+m}.

В теории G-структур возникает следующая проблема: можно ли определить на многообразии X^n, несущем G-структуру, аффинную связность, параллельные переносы которой сохраняют эту G-структуру? Если ответ на этот вопрос положительный, то G-структура называется *G-структурой конечного типа*, в противном случае она называется *G-структурой бесконечного типа*. Так как на римановых и псевдоримановых пространствах однозначно определяется аффинная связность, порождаемая параллельными переносами, то G-структура, определяемая на этих пространствах, является G-структурой конечного типа. Напротив, в пространстве с почти комплексной структурой нельзя определить однозначно аффинную связность, в которой оператор J комплексной структуры сохраняется при параллельном переносе; как показывают исследования, в этих пространствах нельзя ввести однозначно аффинную связность, определяемую с помощью дифференциальных продолжений этой G-структуры, поэтому эта G-структура является G-структурой бесконечного типа.

Дифференциальной геометрии G-структур посвящена обширная литература, из которой отметим книгу Ш. Кобаяси «Группы преобразований в дифференциальной геометрии» [Коб].

Квазигруппы и ткани

Квазигруппой называется множество элементов, в котором, так же как и в группе, определена операция $z=xy$, но остальные свойства группы заменены свойством разрешимости уравнений $ax=b$ и $xa=b$ для любых a и b. В том случае, когда квазигруппа обладает нейтральным элементом (единицей), она называется *лупой*. Операция $z=xy$ в квазигруппах в общем случае не обладает ассоциативностью. Группы можно рассматривать как частные случаи квазигрупп, обладающие ассоциативностью.

В квазигруппах, не являющихся группами, кроме бинарной операции $z=xy$ имеется тернарная операция

$$w = xyz = (xy)z - x(yz). \tag{7.17}$$

Элемент (7.17) называется *ассоциатором* элементов x, y, z. Наиболее важные классы луп были определены Рут Муфанг (1905—1977), кото-

рая ввела также термин «квазигруппа», и Герритом Болем (1906—1987). Различают *левые лупы Боля*, в которых выполняется тождество

$$(u(uv))w = u(v(uw)), \tag{7.18}$$

и *правые лупы Боля*, в которых выполняется тождество

$$u((vw)v) = ((uv)w)v. \tag{7.19}$$

Лупами Муфанг называются лупы, являющиеся одновременно левыми и правыми лупами Боля. В лупах Муфанг выполняется тождество

$$(uv)(wv) = v((uw)v). \tag{7.20}$$

Лупы называются *моноассоциативными*, если в них выполняется тождество

$$u^2u - uu^2 = \{uuu\} = 0. \tag{7.21}$$

В том случае, когда координаты элементов лупы $z = xy$ являются аналитическими функциями координат элементов x, y, лупа называется *аналитической*. Аналитические лупы обладают многими свойствами групп Ли, в частности, для них можно определить *локальные алгебры* — аналоги алгебр Ли. В этих локальных алгебрах для любых векторов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, касательных к линиям $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, проходящим через единицу e лупы при $t = 0$, определены *коммутаторы* $[\boldsymbol{ef}]$ и *коассоциаторы* $(\boldsymbol{efg})$.

Векторы $[\boldsymbol{ef}]$ — касательные к линиям

$$u(t, s) = (x(t)y(s))(y(s)x(t))^{-1}, \tag{7.22}$$

$$v(t, s) = {}^{-1}(y(s)x(t))(x(t)y(s)), \tag{7.23}$$

где элементы w^{-1} и ${}^{-1}w$ — правые и левые обратные элементы для элемента w, определяемые соотношениями $ww^{-1} = e$ и ${}^{-1}ww = e$. Векторы $(\boldsymbol{efg})$ — касательные к линиям

$$u(t, s, r) = ((x(t)y(s))z(r))(x(t)(y(s)z(r)))^{-1}, \tag{7.24}$$

$$v(t, s, r) = {}^{-1}(x(t)(y(s)z(r)))((x(t)y(s))z(r)). \tag{7.25}$$

В случае луп Муфанг локальные алгебры были определены Анатолием Ивановичем Мальцевым (1909—1967) в работе [Мал] и в настоящее время называются *алгебрами Мальцева*.

В случае луп Муфанг коассоциаторы $(\boldsymbol{efg})$ выражаются через коммутаторы по формуле

$$(\boldsymbol{efg}) = \frac{1}{6}([\boldsymbol{e}[\boldsymbol{fg}]] + [\boldsymbol{f}[\boldsymbol{ge}]] + [\boldsymbol{g}[\boldsymbol{ef}]]), \tag{7.26}$$

правая часть которой только множителем отличается от левой части тождества Якоби (2.14).

Из формулы (7.26) вытекает, что в алгебрах Мальцева выполняются условия

$$(eef) = (eff) = 0. \tag{7.27}$$

Среди луп Муфанг, так же как и среди групп Ли, можно определить *простые лупы*.

А. С. Сейгл в работе «Простые алгебры Мальцева над полями характеристики нуль» [Sag] доказал, что простыми аналитическими лупами Муфанг являются гиперсферы $|\alpha| = 1$ в алгебрах $\mathbb{O}$ и $\mathbb{CO}$ октонионов и биоктонионов и пара гиперсфер $|\alpha| = \pm 1$ в алгебре $\mathbb{O}'$ антиоктонионов. Группы автоморфизмов этих алгебр, являющиеся вещественными и комплексной простыми группами Ли класса G_2, переводят в себя пересечения этих гиперсфер с гиперплоскостями $\alpha = -\bar{\alpha}$. Эти пересечения при отождествлении диаметрально противоположных точек гиперсфер превращаются в пространства Sg^6, Sg_3^6, Hg_2^6 и $\mathbb{C}Sg^6$. А. Фрёлихер в работе «К дифференциальной геометрии комплексных структур» [Fro] доказал, что это пересечение в случае алгебры $\mathbb{O}$ обладает почти комплексной структурой (касательные пространства к этому пересечению можно рассматривать как пространства $\mathbb{C}\bar{R}^3$).

В случае луп Боля локальные алгебры называются *алгебрами Боля*. В локальных алгебрах левых луп Боля выполняется условие

$$(eef) = 0, \tag{7.28}$$

в локальных алгебрах правых луп Боля выполняется условие

$$(eff) = 0. \tag{7.29}$$

Совпадение условия (7.27) с условиями (7.28) и (7.29) связано с тем, что лупы Муфанг являются одновременно левыми и правыми лупами Боля. В локальных алгебрах моноассоциативных луп выполняется условие

$$(eee) = 0. \tag{7.30}$$

А. М. Шелехов [She] доказал, что в этих алгебрах, кроме бинарной операции коммутирования и тернарной операции определения коассоциатора, имеются еще две кватернарные операции.

Аналитические лупы связаны с теорией тканей на гладких многообразиях, образованных некоторым числом гладких слоений. Заметим, что эти ткани представляют собой G-структуры первого порядка.

Теория тканей была основана В. Бляшке и его сотрудниками в серии работ «Топологические вопросы дифференциальной геометрии» [BlaT],

где рассматривались ткани, образованные семействами кривых на плоскости, а также семействами поверхностей и кривых в трехмерном пространстве. При этом изучались те свойства тканей, которые остаются инвариантными при дифференцируемых гомеоморфизмах областей, в которых они заданы, что объясняет название серии [BlaT].

В статьях этой серии были установлены связи теории тканей с теорией квазигрупп. Итог исследований по теории тканей был подведен Б. Бляшке и Г. Болем в книге «Геометрия тканей» [BlaB] и в книге «Введение в геометрию тканей» В. Бляшке [Bla2].

Но еще в 1908 г. Картан в работе «Подгруппы непрерывных групп преобразований» [26] поставил задачу об эквивалентности двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dY}{dX} = F(X, Y) \tag{7.31}$$

по отношению к преобразованиям вида

$$'x = X(x), \quad 'y = Y(y). \tag{7.32}$$

Последние преобразования оставляют инвариантными на плоскости XOY координатные линии $x = a$, $y = b$, а также интегральные линии уравнений (7.31). Эти три семейства линий образуют на плоскости 3-ткань. Поэтому задача, которую рассматривал Картан, равносильна задаче о классификации криволинейных 3-тканей на плоскости.

Картан различал три класса дифференциальных уравнений типа (7.31): допускающие группу преобразований (7.32), зависящую от трех параметров, зависящую от одного параметра и не допускающие таких преобразований. Им соответствуют три класса криволинейных 3-тканей на плоскости.

В 1930-х годах, наряду с тканями на плоскости и в трехмерном пространстве, начали изучаться также ткани на многообразиях размерности больше, чем 3. В 1935 г. была опубликована работа Боля «О 3-ткани в четырехмерном пространстве» [Bol1], где рассматривались 3-ткани, образованные тремя двумерными расслоениями. В 1936 г. Чжэнь опубликовал работу «Инвариантная теория 3-ткани, образованной r-мерными многообразиями в R_{2r}» [Chr1].

В последующие десятилетия многомерные ткани интенсивно изучались М. А. Акивисом, М. А. Васильевым, В. В. Гольдбергом и А. М. Шелеховым.

Простейшей 3-тканью на плоскости R^2 является 3-ткань, образованная тремя семействами параллельных прямых. Так как из отрезков этих

прямых составляются замкнутые шестиугольники, такая ткань называется *шестиугольной*. Криволинейная 3-ткань, допускающая отображение на шестиугольную, называется *параллелизуемой* 3-тканью.

В общем случая многомерная 3-ткань W на многообразии X размерности $2n$ образована тремя слоениями λ_α размерности n, $\alpha = 1, 2, 3$. Через каждую точку x многообразия X^{2n} проходят три слоя F_α, принадлежащие этим слоениям. Обозначим через $T_x(F_\alpha)$ n-мерные подпространства пространства, касательные к слоям F_α, проходящим через точку x. Подгруппа группы линейных преобразований пространства $T_x(X^{2n})$, сохраняющая подпространство $T_x(F_\alpha)$, является структурной группой G-структуры, определяемой на X^{2n} 3-тканью W. Нетрудно доказать, что в этом случае 3-ткань W является G-структурой, причем группой G этой структуры является группа GL_n. Эта G-структура — конечного типа, так как она определяет на многообразии X аффинную связность, в которой слои 3-ткани являются вполне геодезическими подмногообразиями многообразия X.

Подпространства $T_x(F_\alpha)$ определяют в пространстве $T_x(X^{2n})$ алгебраический конус, высекающий из бесконечно удаленной гиперплоскости этого пространства сегреану $\Sigma_{1,n-1}$ и называемый *конусом Сегре*. Так как сегреана, определяемая этим конусом, обладает прямолинейными и $(n-1)$-мерными плоскими образующими, то этот конус имеет двумерные и n-мерные плоские образующие. Линейные преобразования пространства $T_x(X^{2n})$, переводящие в себя конус Сегре, образуют группу G, которая является прямым произведением групп GL_n и SL_2. Группа G определяет в пространстве X новую G-структуру, которая называется *почти грассмановой* структурой $\mathrm{AGr}_{n+1,1}$. Это название объясняется тем, что в наиболее простом случае, когда эта G-структура интегрируема, многообразие X допускает отображение на грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{n+1,1}$ прямых линий проективного пространства P^{n+1}. В этом случае 3-ткань W называется *грассманизуемой* и определяется тройкой гиперповерхностей пространства P^{n+1}.

Почти грассманова структура $\mathrm{AGr}_{n+1,1}$, так же как и структура, определяемая 3-тканью W, имеет конечный тип. Аффинная связность на ней определяется дифференциальной окрестностью третьего порядка, в то время как для G-структуры, индуцируемой на X^{2n} 3-тканью W, аффинная связность определяется дифференциальной окрестностью второго порядка.

Связь многомерных 3-тканей с дифференцируемыми квазигруппами устанавливается следующим образом. Если отобразить n-мерные базы слоений λ_α, образующих на X^{2n} 3-ткань W, на одно и то же n-мерное

многообразие, то на нем возникает алгебраическая операция, определяющая гладкую квазигруппу или лупу. При этом различным классам гладких квазигрупп и луп соответствуют различные классы 3-тканей.

М. А. Акивис в статье [Ак7] определил локальные алгебры, связанные с 3-тканями. В настоящее время эти алгебры называются «алгебрами Акивиса». Они изучались Л. В. Сабининым и П. О. Михеевым в работе [СМ] и другими математиками. В случае, когда гладкие квазигруппы, определяемые 3-тканями, являются лупами, алгебры Акивиса 3-тканей совпадают с локальными алгебрами луп. Этим алгебрам посвящен доклад Акивиса и Гольдберга «Алгебраические аспекты теории тканей» [AG3].

В случае, когда лупа, связанная с 3-тканью, — абелева группа Ли, мы получаем 3-ткань Г. Томсена [Tho]. Алгебра Акивиса этой 3-ткани является алгеброй Ли, все коммутаторы которой равны нулю.

В случае, когда лупа, связанная с 3-тканью, — группа Ли общего вида, мы получаем 3-ткань К. Рейдемейстера [Rei]. Алгебра Акивиса этой 3-ткани является алгеброй Ли общего вида.

В случае, когда лупа, связанная с 3-тканью, — лупа Муфанг, мы получаем 3-ткань Муфанг. Алгебра Акивиса этой 3-ткани является алгеброй Мальцева.

В случае, когда лупа, связанная с 3-тканью, — лупа Боля, мы получаем 3-ткань Боля. Алгебры Акивиса этих 3-тканей являются алгебрами Боля.

В случае, когда лупа, связанная с 3-тканью, — моноассоциативная лупа, мы получаем шестиугольную 3-ткань.

Теория многомерных 3-тканей изложена в книгах Акивиса и Шелехова [АШ], [ASh] и Гольдберга «Теория многокоразмерных $(n+1)$-тканей» [Glb].

Современное состояние теории квазигрупп и луп описано в книге «Квазигруппы и лупы: введение» [Pf] Г. О. Пфлюгфельдер и в сборнике статей «Квазигруппы и лупы: теория и приложения» [CPS], изданном под редакцией О. Чейна, Пфлюгфельдер и Дж. Смита. Отметим следующие статьи из этого сборника: Гольдберга — о работах его и Акивиса, и Сабинина и Михеева об их работах.

Заключение

В своем научном творчестве Картан, как правило, отправлялся от работ своих предшественников, давая их идеям столь значительное развитие, что часто авторы первоначальных работ забывались. Так было в теории простых групп с В. Киллингом, в теории метода подвижного репера — с Э. Коттоном, в теории симметрических римановых пространств с Г. Леви. Дело обстояло несколько иначе в теории обобщенных пространств, в которой Картан плодотворно сотрудничал с ее основоположниками Г. Вейлем и Я. А. Схоутеном. В работах Коттона и Леви были даны только первые определения будущих теорий, которые предстояло построить Картану. В работе Киллинга были сформулированы важные понятия новой теории и ее основные факты, но строгое доказательство этих результатов было дано только в диссертации Картана и после ее публикации статью Киллинга почти не читали.

А. Дж. Колман, прочитав работу Киллинга, пришел в восторг и написал о ней статью «Величайшая математическая работа всех времен» [Col]. В этой статье Колман писал: «Картан дал замечательно элегантное изложение результатов Киллинга. Он внес также существенный вклад в логику его аргументов, доказав, что „подалгебра Картана“ простой алгебры Ли — абелева. Это свойство было анонсировано Киллингом, но его доказательство было неполным ... В последней трети диссертации Картана обоснованы многие новые и важные результаты, идущие дальше работы Киллинга. Лично я, следуя шкале оценок моего учителя Клода Шевалле, считаю Картана и Вейля двумя крупнейшими математиками первой половины XX века. Работы Картана о бесконечномерных алгебрах Ли, внешнем дифференциальном исчислении, дифференциальной геометрии и, прежде всего, о теории представлений полупростых алгебр Ли имеют исключительную ценность. Но так как докторская диссертация математика, кажется, должна предопределять математические труды всей его жизни, то, быть может, если бы Картан не натолкнулся на мысль основать свою диссертацию на создающем эпоху труде Киллинга, он мог бы закончить свои дни преподавателем провинциального лицея, и математический мир никогда не слышал бы о нем!» [Col, с. 30].

Аналогичная ситуация, по мнению Ж. Ф. Поммаре [Pom], имела место с работами Картана по теории уравнений Пфаффа.

«Предсказание» Колмана полностью оправдалось в судьбе предшественника Картана по приведению в порядок результатов Киллинга — К. А. Умлауфа, автора диссертации [Um], о дальнейшей жизни и деятельности которого мы не имеем сведений.

Судьба Картана, напротив, была вполне счастливой и творчески необычайно активной. После окончания работы над классификацией комплексных простых групп Ли Картан создал аналогичную классификацию комплексных и вещественных простых ассоциативных алгебр и комплексных простых псевдогрупп Ли. Эта теория привела его к уравнениям Пфаффа, применение которых к дифференциальной геометрии полностью преобразовало этот раздел геометрии и позволило Картану и его последователям решить многочисленные задачи в различных пространствах. Работа Картана о простых группах Ли была продолжена его замечательной теорией линейных представлений этих групп и классификацией вещественных простых групп Ли. Впоследствии Картан создал геометрии «обобщенных пространств» и теорию симметрических пространств, с помощью которой дал новое, чрезвычайно изящное решение задачи классификации вещественных простых групп Ли.

Труды Эли Картана оказали огромное влияние на многих математиков XX века. Наиболее ярким свидетельством этого было создание Анри Картаном и его друзьями Андре Вейлем, Жаном Дьедонне, Клодом Шевалле и Жаном Фредериком Дельсартом математической энциклопедии «Элементы математики» [Бу] под общим псевдонимом «Никола Бурбаки».

Влиянию Картана на современную математику была посвящена международная конференция «Математическое наследие Эли Картана», состоявшаяся в Лионском университете 25—29 июня 1984 г. в связи со 115-й годовщиной со дня рождения Картана. Сопредседателями конференции были Анри Картан и Ш. Чжэнь. В работе конференции участвовали М. Берже, Р. Брайант, А. Вайнштейн, И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, В. В. Гольдберг, М. Громов, В. Г. Кац, Г. Д. Мостов, И. Пятецкий-Шапиро, Ж. Титс, А. Траутман, С. Хелгасон и другие. Участники конференции совершили поездку в Доломье. Доклады участников конференции опубликованы в книге [ECM].

Даты жизни и деятельности Картана

1869	9 апреля родился в Доломье (Франция), в семье кузнеца.
1880—1885	Учащийся коллежа в Вьенне.
1885—1887	Учащийся лицея в Гренобле.
1887—1888	Учащийся лицея Жансон де Сайи в Париже.
1888—1891	Студент Высшей Нормальной школы в Париже.
1891—1892	Солдат и сержант французской армии.
1892—1894	Стипендиат фонда Пеко для молодых французских ученых.
1892—1894	Знакомство с Софусом Ли и беседы с ним в Париже.
1894	Защитил в Сорбонне докторскую диссертацию «Структура конечных непрерывных групп преобразований», посвященную теории комплексных простых групп Ли.
1894—1896	Преподаватель математики университета в Монпелье.
1896—1903	Преподаватель математики университета в Лионе.
1898	Опубликована статья «Билинейные группы и системы комплексных чисел», посвященная теории комплексных и вещественных ассоциативных алгебр.
1899	Опубликована первая статья о проблеме Пфаффа.
1903	Женитьба на Мари-Луизе Бьянкони.
1903—1909	Профессор математики университета и Института электротехники и прикладной механики в Нанси.
1904	8 июля в Нанси родился сын Анри, впоследствии крупный математик, один из основателей группы Бурбаки.
1904—1905	Опубликованы первые статьи по теории псевдогрупп Ли и теории систем уравнений Пфаффа в инволюции.
1908	Опубликована статья «Комплексные числа» для французского издания «Энциклопедии математических наук», посвященная теории алгебр, — расширенный перевод статьи Э. Штуди для немецкого издания этой энциклопедии.
1909—1912	Преподаватель математики в Сорбонне.
1910	Опубликованы первые статьи о методе подвижного репера.
1912—1940	Профессор математики в Сорбонне, с 1924 г. заведующий кафедрой высшей геометрии.

1913	Опубликована статья «Проективные группы, не оставляющие инвариантным ни одного плоского многообразия», в которой построена теория линейных представлений комплексных простых групп Ли.
1914	Опубликованы статьи о классификации вещественных простых групп Ли и их линейных представлениях.
1914—1915	Написана статья «Теория непрерывных групп и геометрия» для французского издания «Энциклопедии математических наук» — расширенный перевод статьи Дж. Фано для немецкого издания этой энциклопедии. В 1914 г. были опубликованы первые параграфы статьи. Полностью статья опубликована в 1955 г.
1915—1918	Сержант французской армии, служил в военном госпитале в помещении Высшей Нормальной школы.
1916—1920	Опубликованы статьи по теории изгибания поверхностей в евклидовом, конформном и проективном пространствах.
1922	Опубликованы статьи по теории гравитации и книга «Лекции об интегральных инвариантах».
1923—1925	Опубликованы статьи о геометрии пространств аффинной, конформной и проективной связности.
1925	Опубликована книга «Геометрия римановых пространств».
1926	Опубликована статья «Об одном замечательном классе римановых пространств», в которой создана теория симметрических пространств.
1926—1927	Прочел в Сорбонне курс лекций «Риманова геометрия в ортогональном репере».
1927	Опубликована статья «Геометрия групп преобразований», где создана теория симметрических пространств аффинной связности.
1928	Опубликована книга «Лекции о геометрии римановых пространств».
1930	Прочел в Московском университете курс лекций «Метод подвижного репера, теория конечных непрерывных групп и обобщенные пространства».
1931	Опубликована книга «Лекции о комплексной проективной геометрии».
1931	Избрание в Парижскую Академию наук.
1934	Опубликована книга «Финслеровы пространства».

1937	Опубликованы книги «Лекции по теории пространств проективной связности» и «Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия».
1938	Опубликована книга «Лекции по теории спиноров». Награждение в Казани медалью на VIII Международном конкурсе имени Лобачевского за работы по геометрии.
1939	18 мая — торжественное празднование в Сорбонне 70-летия Картана.
1942	Написана статья к столетнему юбилею Софуса Ли (опубликована в 1948 г.). Написана статья «Изотропные поверхности квадрики пространства семи измерений» (опубликована в 1995 г.).
1945	Опубликована книга «Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения».
1946	Опубликовано второе, значительно дополненное издание книги «Лекции о геометрии римановых пространств».
1951	6 мая умер в Париже.

Список сочинений Картана

Сокращения

ИКО — Известия Казанского физико-математического общества
МСб — Математический сборник
ТрС — Труды Семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ
AC — Actes du Congrès Mathématique International
AF — Association Française de'Avancement des Sciences
AJ — American Journal of Mathematics
AM — Annali di Matematica pura ed applicata
AMH — Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg
AP — Annales de la Société Polonaise Mathématique
AS — Annales Scientifiques de l'École Normale Superieure
ASP — Annali della Scuola Normale Superiora di Pisa, Cl. Sci
BS — Bulletin de la Société Mathématique de la France
BSc — Bulletin des Sciences Mathématiques
CH — Commentarii Mathematici Helvetici
CR — Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris
EM — L'Enseignement Mathématique
JM — Journal des Mathématiques pures et appliquées
JR — Journal für reine und angewandte Mathematik
MA — Mathematische Annalen
MZ — Mathematische Zeitschrift
PIB — Publications de l'Institut Mathematique de Belgrade
PNA — Proceedings of Nederlandsch Kon. Akademie van Wetenschapen
RA — Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei
RC — Rendiconti del Circolo matematico de Palermo
SBS — Sitzungsberichte der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse
SS — Séances de la Société Mathématique de la France
VNA — Verslagen van Nederlandsch Kon. Akademie van Wetenschapen

Математические сочинения Картана

Список воспроизводит названия сочинений, указанные в изданиях [204], [207] и [209]. К этим спискам мы добавляем переиздания, пе-

реводы сочинений Картана и его сочинения, пропущенные в упомянутых списках.

1893

[1] *Sur la structure des groupes simples finis et continus*, CR, t. 116, 784—786; [207, 209], pt. 1, 99—101.

[2] *Sur la structure des groupes finis et continus*, CR, t. 116, 962—964; [207, 209], pt. 1, 103—105.

[3] *Über die einfachen Transformationsgruppen*, SBS, Bd. 45, 395—420; [207, 209], pt. 1, 107—132.

1894

[4] *Sur la réduction de la structure d'un groupe à sa forme canonique*, CR, t. 119, 639—641; [207, 209], pt. 1, 133—135.

[5] *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, Thèse, Paris, Nony; 2ème éd.: Vuibert, Paris, 1933; [207, 209], pt. 1, 137—287.

[6] *Sur un théorème de M. Bertrand*, CR, t. 119, 902; [207, 209], pt. 3, 1.

[7] *Sur un théorème de M. Bertrand*, BS, t. 22, 230—234; [207, 209], pt. 3, 3—7.

1895

[8] *Sur certains groupes algébriques*, CR, t. 120, 544—548; [207, 209], pt. 1, 289—292.

1896

[9] *Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu*, AJ, vol. 18, 1—61; [207, 209], pt. 1, 293—353.

[10] *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé*, BS, t. 24, 140—177; [207, 209], pt. 2, 265—302.

1897

[11] *Sur les systèmes de nombres complexes*, CR, t. 124, 1217—1220; [207, 209], pt. 2, 1—4.

[12] *Sur le systèmes réels de nombres complexes*, CR, t. 124, 1296—1297; [207, 209], pt. 2, 5—6.

1898

[13] *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, t. 12B, 1—99; [207, 209], pt. 2, 7—105.

1899

[14] *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, AS, t. 16, 239—332; [207, 209], pt. 2, 303—396.

1901

[15] *Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires*, BS, t. 29, 118—130; [207, 209], pt. 2, 397—409.

[16] *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, AS, t. 18, 241—311; [207, 209], pt. 2, 411—481.

[17] *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux*, BS, t. 29, 233—302; [207, 209], pt. 2, 483—553.

1902

[18] *Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables*, I, CR, t. 134, 1415—1418; [207, 209], pt. 2, 555—558.

[18a] *Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables*, II, CR, t. 134, 1564—1566; [207, 209], pt. 2, 559—561.

[19] *Sur l'équivalence des systèmes différentiels*, CR, t. 135, 781—783; [207, 209], pt. 2, 563—565.

[20] *Sur la structure des groupes infinis*, CR, t. 135, 851—853; [207, 209], pt. 2, 567—569.

1904

[21] *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, I, AS, t. 21, 153—206; [207, 209], pt. 2, 571—624. Русский перевод: *О структуре бесконечномерных групп преобразований*, [211], 9—57.

1905

[22] *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, II, AS, t. 22, 219—308; [207, 209], pt. 2, 625—714. Русский перевод: *О структуре бесконечномерных групп преобразований*, [211], 58—139.

1907

[23] *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, CR, t. 144, 1094—1097; [207, 209], pt. 2, 715—718.

[24] *Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbé*, I, CR, t. 145, 1403—1406; [207, 209], pt. 3, 9—12.

1908

[25] *Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbé*, II, CR, t. 146, 168; [207, 209], pt. 3, 12.

[26] *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, AS, t. 25, 57—194; [207, 209], pt. 2, 719—856. Русский перевод: *Подгруппы непрерывных групп преобразований*, [211], 141—271.

[27] *Nombres complexes* (расширенный перевод статьи Э. Штуди), Encyclopédie des sciences mathématiques, t. 1, № 5, 329—468; [207, 209], pt. 2, 107—246.

1909

[28] *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, AS, t. 26, 93—161; [207, 209], pt. 2, 857—925. Русский перевод: *Простые бесконечномерные непрерывные группы преобразований*, [211], 273—337.

1910

[29] *Sur les développables isotropes et la méthode du trièdre mobile*, CR, t. 151, 919—921; [207, 209], pt. 3, 141—143.

[30] *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre*, AS, t. 27, 109—192; [207, 209], pt. 2, 927—1010.

[31] *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile*, BSc, t. 34, 250—284; [207, 209], pt. 3, 145—178. Русский перевод: *Структура бесконечномерных групп*, [211], 339—389.

1911

[32] *Le calcul des variations et certaines familles de courbes*, BS, t. 39, 29—52; [207, 209], pt. 2, 1011—1034.

[33] *Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes*, BS, t. 39, 352—443; [207, 209], pt. 2, 1035—1125.

1912

[34] *Sur les caractéristiques de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles*, SS, t. 40, 18; [207, 209], pt. 2, 1127.

[35] *Sur les groupes de transformations de contact et la Cinématique nouvelle*, SS, t. 40, 23; [207, 209], pt. 3, 179.

1913

[36] *Remarques sur la composition des forces*, SS, t. 41, 58—60; [207, 209], pt. 2, 247—248.

[37] *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, BS, t. 41, 53—96; [204], 137—151; [207, 209], pt. 1, 355—398.

1914

[38] *Les groupes réels simples finis et continus*, AS, t. 31, 263—355; [207, 209], pt. 1, 399—491.

[39] *Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, JM, t. 10, 149—186; [207, 209], pt. 1, 493—530.

[40] *Sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles*, CR, t. 158, 326—328; [207, 209], pt. 2, 1129—1131.

[41] *Sur certaines familles naturelles de courbes*, SS, t. 42, 15—17; [207, 209], pt. 3, 181—183.

[42] *Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes*, BS, t. 42, 12—48; [207, 209], pt. 2, 1133—1168.

[43] *La théorie des groupes*, Revue du Mois, t. 17, 438—468.

1915

[44] *Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles*, JR, Bd. 145, 86—91; [207, 209], pt. 2, 1169—1174.

[45] *Sur les transformations de Bäcklund*, BS, t. 43, 6—24; [207, 209], pt. 2, 1175—1193.

[46] *La théorie des groupes continus et la géométrie* (расширенный перевод статьи Дж. Фано), Encyclopédie des sciences mathématiques, t. 3, № 5, 332—352; [207, 209], pt. 3, 1727—1861.

1916

[47] *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions*, BS, t. 44, 65—99; [207, 209], pt. 3, 185—219.

1917

[48] *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geqslant 5$ dimensions*, BS, t. 45, 57—121; [207, 209], pt. 3, 221—285.

1918

[49] *Sur certaines hypersurfaces de l'espace conforme réel à cinq dimensions*, BS, t. 46, 84—105; [207, 209], pt. 3, 287—308.

[50] *Sur les variétés à trois dimensions*, CR, t. 167, 357—359; [207, 209], pt. 3, 309—311.

[50a] *Sur les variétés développables à trois dimensions*, CR, t. 167, 426—429; [207, 209], pt. 3, 312—314.

[50b] *Sur les variétés de Beltrami à trois dimensions*, CR, t. 167, 482—484; [207, 209], pt. 3, 315—317.

[50c] *Sur les variétés de Riemann à trois dimensions*, CR, t. 167, 550—551; [207, 209], pt. 3, 318—319.

1919

[51] *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*, I, BS, t. 47, 125—160; [207, 209], pt. 3, 321—359.

1920

[52] *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*, II, BS, t. 48, 132—208; [207, 209], pt. 3, 360—432.

[53] *Sur la déformation projective des surfaces*, CR, t. 170, 1439-1441; [207, 209], pt. 3, 433—435.

[53a] *Sur l'applicabilité projective des surfaces*, CR, t. 171, 27—29; [207, 209], pt. 3, 437—439.

[54] *Sur la déformation projective des surfaces*, AS, t. 37, 259—356; [207, 209], pt. 3, 441—538.

[55] *Sur le problème général de la déformation*, AC, Strasbourg, 397—406; [207, 209], pt. 3, 539—548.

1922

[56] *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, JM, t. 1, 141—203; [207, 209], pt. 3, 549—611.

[57] *Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein*, CR, t. 174, 437—439; [207, 209], pt. 3, 613—615.

[58] *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, CR, t. 174, 593—595; [207, 209],

pt. 3, 616—618. Английский перевод: Cosmology and gravitation, Plenum Press, New York—London, 1980, 493—496.

[59] *Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité*, CR, t. 174, 734—736; [207, 209], pt. 3, 619—621.

[60] *Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique*, CR, t. 174, 857—859; [207, 209], pt. 3, 622—624. Английский перевод: [210], 195—199.

[61] *Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein*, CR, t. 174, 1104—1106; [207, 209], pt. 3, 625—627.

[62] *Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique*, CR, t. 175, 82—85; [207, 209], pt. 3, 629—632.

[63] *Sur les petites oscillations d'une masse fluide*, BSc, t. 46, 317—352, 356—369; [207, 209], pt. 3, 13—61.

[64] *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris; 2ème éd.: 1958; 3ème éd.: 1971. Русский перевод: *Интегральные инварианты*, Гостехиздат, М.—Л., 1940; 2-е изд.: УРСС, Москва, 1998.

1923

[65] *Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl*, JM, t. 2, 167—192; [207, 209], pt. 3, 633—658.

[66] *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, I, AS, t. 40, 325—412; [207, 209], pt. 3, 659—746. Сокращенный русский перевод: *Пространства аффинной связности*, [208], 6—58. Английский перевод: *On manifolds with affine connections and the generalized theory of relativity*, Bibliopolis, Naples, 1966; 2nd ed.: [210], 29—105.

[67] *Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre*, AP, t. 2, 1—8; [207, 209], pt. 3, 63—70.

[68] *Les espaces à connexion conforme*, AP, t. 2, 171—221; [207, 209], pt. 3, 747—797. Русский перевод: *Пространства конформной связности*, [208], 153—206.

1924

[69] *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, II, AS, t. 41, 1—25; [207, 209], pt. 3, 799—823. Английский перевод: см. [66]; [210], 107—127.

[70] *Sur les variétés à connexion projective*, BS, t. 52, 205—241; [204], 165—201; [207, 209], pt. 3, 825—861. Русский перевод: *Пространства проективной связности*, [208], 119—152.

[71] *Les récentes généralisations de la notion d'espace*, BSc, t. 48, 294—320; [207, 209], pt. 3, 863—889.

[72] *La théorie de la relativité et les espaces généralisés*, Atti del V Congresso Internazionale di Filosofia, 427—436.

[73] *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle*, EM, t. 24, 1925, 1—18; AC, Toronto, vol. 1, 1928, 85—94; [207, 209], pt. 3, 891—904. Испанский перевод: Revista matematica Hispano-Americana, 1927, 1—13.

[74] *Sur les formes différentielles en géométrie*, CR, t. 178, 182—184; [207, 209], pt. 3, 905—907.

[75] *Sur la connexion affine des surfaces*, CR, t. 178, 292—295; [207, 209], pt. 3, 209—212.

[76] *Sur la connexion affine des surfaces développables*, CR, t. 178, 449—451; [207, 209], pt. 3, 912—914.

[77] *Sur la connexion projective des surfaces*, CR, t. 178, 750—752; [207, 209], pt. 3, 215—217.

1925

[78] *Note sur la génération des oscillations entretenues* (совместно с Анри Картаном), Annales des Postes, Telegraphe et Telephone, t. 14, 1196—1207; [207, 209], pt. 3, 71—82.

[79] *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'Analysis situs*, AF, Grenoble, 47—49; [207, 209], pt. 3, 919—920.

[80] *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, I, AS, t. 42, 17—88; [207, 209], pt. 3, 921—992. Сокращенный русский перевод: *Пространства аффинной связности*, [208], 70—118. Английский перевод: [210], 129—193.

[81] *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples*, BSc, t. 49, 130—152; [207, 209], pt. 1, 511—553.

[82] *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples*, BSc, t. 49, 361—374; [207, 209], pt. 1, 551—568.

[83] *Sur le mouvement à deux paramètres*, Nouvelles Annales, t. 1, 33—37; [207, 209], pt. 3, 83—87.

[84] *La géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris.

1926

[85] *L'application des espaces de Riemann et l'Analysis situs*, AF, Lyon, 53—55; [207, 209], pt. 3, 993—995.

[86] *Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff*, CR, t. 182, 956—958; [207, 209], pt. 3, 1195—1197.

[87] *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure*, RA, t. 3^{I}, 544—547; [207, 209], pt. 1, 562—572.

[88] *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*, Acta Mathematica, t. 48, 1—42; [207, 209], pt. 3, 997—1038. Русский перевод: [205], 59—110.

[89] *Sur les sphères des espaces de Riemann à trois dimensions*, JM, t. 5, 1—18; [207, 209], pt. 3, 1039—1056.

[90] *L'axiome du plan et la géométrie différentielle métrique*, In memoriam N. I. Lobatschevskii, вып. 2, Главнаука, Казань, 1927, 4—12; [207, 209], pt. 3, 1057—1065.

[91] *On the geometry of the group-manifold of simple and semi-simple groups* (совместно с Я. А. Схоутеном), PNA, t. 29, 803—815; [207, 209], pt. 1, 573—585. Голландский перевод: *Over de meetkunde der groepuitgebreidheid van halfeenvondige en eenvondige groepen*, VNA, t. 35, 385—399.

[92] *On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism* (совместно с Я. А. Схоутеном), PNA, t. 29, 933—946; [207, 209], pt. 3, 1067—1080. Голландский перевод: *Over Riemannsche meetkunden die absoluut parallelisme toelaten*, VNA, t. 35, 505—518.

[93] *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, I, BS, t. 54, 214—264; [207, 209], pt. 1, 587—637. Русский перевод: *Об одном замечательном классе римановых пространств*, [206], 112—139.

1927

[94] *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, II, BS, t. 55, 114—134; [207, 209], pt. 1, 639—659. Русский перевод: *Об одном замечательном классе римановых пространств*, [206], 140—149.

[95] *Sur les courbes de torsion nulle et les surfaces développables dans les espaces de Riemann*, CR, t. 184, 138—140; [207, 209], pt. 3, 1081—1083.

[96] *Sur les géodésiques des espaces de groupes simples*, CR, t. 1, 862—864; [207, 209], pt. 1, 661—663.

[97] *Sur la topologie des groupes continus simples réels*, CR, t. 184, 1036—1038; [207, 209], pt. 1, 664—666.

[98] *Sur l'écart géodésique et quelques questions connexes*, RA, t. 5^1, 609—613; [207, 209], pt. 3, 1085—1089.

[99] *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple*, CR, t. 184, 1628—1630; [207, 209], pt. 1, 667—669.

[100] *Sur les formes riemanniennes des géométries à groupe fondamental simple*, CR, t. 185, 96—98; [207, 209], pt. 1, 670—672.

[101] *La géométrie des groupes de transformations*, JM, t. 6, 1—119; [207, 209], pt. 1, 637—791. Русский перевод: *Геометрия групп преобразований*, [206], 7—111.

[102] *Sur certains cycles arithmétiques*, Nouvelles Annales, t. 2, 33—45; [207, 209], pt. 3, 89—101.

[103] *La géométrie des groupes simples*, AM, t. 4, 209—256; [207, 209], pt. 1, 797—840. Русский перевод: *Геометрия простых групп*, [206], 183—239.

[104] *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, AP, t. 6, 1—7; [207, 209], pt. 3, 1091—1097.

[105] *La théorie des groupes et la géométrie*, EM, t. 26, 200—225; [207, 209], pt. 1, 841—866; Русский перевод: *Теория групп и геометрия*, [205], 111—141.

[106] *Rapport sur le mémoire de J.A.Schouten intitulé «Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie»*, ИКО, т. 2, 71—76; [207, 209], pt. 3, 1099—1104.

[107] *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple*, AS, t. 44, 345—467; [207, 209], pt. 1, 867—989.

[108] *Sur un problème du calcul des variations en géométrie projective plane*, МСб, т. 34, 349—364: [207, 209], pt. 3, 1105-1119.

[108a] *Риманова геометрия в ортогональном репере. По лекциям, читанным в Сорбонне в* 1926—1927 *гг.*, 2-е изд.: Платон, Волгоград, 1997. Китайский перевод: Сян Лифу, Пекин, 1964. Английский перевод: *Riemannian geometry in an orthogonal frame*, World Scientific, New Jersey—Lonfon—Singapore—Hong Kong, 2001.

1928

[109] *Sur les systèmes orthogonaux complets de fonctions dans certains espaces de Riemann clos*, CR, t. 186, 1594—1596; [207, 209], pt. 1, 991—993.

[110] *Sur les espaces de Riemann clos admettant un groupe continu transitif de déplacements*, CR, t. 186, 1817—1819; [207, 209], pt. 1, 995—997.

[111] *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos*, CR, t. 187, 196—198; [207, 209], pt. 1, 999—1001.

[112] *Sur la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Jacobi*, AC, Toronto, t. 2, 9—17; [207, 209], pt. 3, 103—111.

[113] *Complement au mémoire «Sur la géométric des groupes simples»*, AM (4), t. 5, 253—260; [207, 209], pt. 1, 1003—1010.

[114] *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris. Русский перевод: *Геометрия римановых пространств*, ОНТИ, М.—Л., 1936.

[115] *Sur les substitutions orthogonales imaginaires*, AF, Congrès de La Rochelle, 38—40; [207, 209], pt. 2, 249—250.

1929

[116] *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne*, JM, t. 8, 1—33; [207, 209], pt. 1, 1011—1043. Русский перевод: *Компактные и некомпактные простые группы и риманова геометрия*, [206], 150—182.

[117] *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos*, RC, t. 53, 217—252; [207, 209], pt. 1, 1045—1080.

[118] *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topotogiques de ces espaces*, AP, t. 8, 181—225; [204], 203—233; [207, 209], pt. 1, 1081—1125.

[119] *Sur la représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes*, AC, Bologna, 1928, t. 4, 253—261; [207, 209], pt. 3, 113—121.

[120] *Sur les espaces clos admettant un groupe transitif clos fini et continu*, AC, Bologna, 1928, t. 4, 243—252; [207, 209], pt. 1, 1127—1136.

1930

[121] *Les représentations linéaires du groupe des rotations de la sphère*, CR, t. 190, 610—612; [207, 209], pt. 1, 1137—1139.

[122] *Les représentations linéaires des groupes simples et semi-simples clos*, CR, t. 190, 723—725; [207, 209], pt. 1, 1140—1142.

[123] *Le troisième théorème fondamental de Lie*, I, CR, t. 190, 914—916; [207, 209], pt. 1, 1143—1145.

[123a] *Le troisième théorème fondamental de Lie*, II, CR, t. 190, 1005—1007; [207, 209], pt. 1, 1146—1148.

[124] *Notice historique sur la notion de parallélisme absolu*, MA, Bd. 102, 698—706; [207, 209], pt. 3, 1121—1129.

[125] *Sur les représentations linéaires des groupes clos*, CH, t. 2, 269—283, pt. 1, 1131—1153.

[126] *Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés*, Mathematica, t. 4, 114—136; [207, 209], pt. 3, 1131—1153.

[127] *Géométrie projective et géométrie riemannienne*, Труды I Всесоюзного математического съезда, Харьков, 179—190; [207, 209], pt. 3, 1155—1166.

[128] *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs*, Gauthier-Viltars, Paris, 62 p.; 2ème éd.: 1952; [207, 209], pt. 1, 1165—1225. Русский перевод: *Теория конечных непрерывных групп и топология*, [206], 240—292.

1931

[129] *Géométrie euclidienne et géométrie riemannienne*, Scientia, 393—402.

[130] *Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ*, Revue Métaph. Morale, 13—28; 2ème éd.: Hermann, Paris, 1932; 3ème éd.: 1974; [207, 209], pt. 3, 1167—1185.

[131] *Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la Relativité*, BS, t. 59, 88—118; [207, 209], pt. 2, 1199—1229.

[132] *Sur les développantes d'une surface réglée*, Bulletin del'Academie Roumaine de Sciences, t. 14, 167—174; [207, 209], pt. 3, 1187—1194.

[133] *Le groupe fondamental de la géométrie des sphères orientées réelles*, AF, Nancy, 21—28; [207, 209], pt. 3, 1195—1202.

[134] *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Gauthier-Villars, Paris; 2ème éd.: 1950.

1932

[135] *Sur le groupe de la géométrie hypersphérique*, CH, t. 4, 158—171; [207, 209], pt. 3, 1203—1216.

[136] *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, I, AM, t. 11, 17—90; [207, 209], pt. 2, 1231—1304.

[136a] *Sur la geometric pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, II, ASP, t. 1, 333—354; [207, 209], pt. 3, 1217—1238.

[137] *Sur les proppiétés topologiques des quadriques complexes*, PIB, t. 1, 55—74; [207, 209], pt. 1, 1227—1246.

[138] *Les espaces riemanniens symétpiques*, AC, Zürich, Bd. I, 152—161; [207, 209], pt. 1, 1247—1256.

[139] *Sur l'équivalence pseudo-conforme de deux hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, AC, Zürich, Bd. II, 54—56; [207, 209], pt. 2, 1305—1306.

1933

[140] *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, Hermann, Paris. Русский перевод: [205], 143—194.

[140a] *La cinématique newtonienne et les espaces à courbure euclidienne*, Bulletin de la Société Mathematique de Roumanie, t. 35, 69—73; [207, 209], pt. 3, 1239—1243.

[140b] *Observations SUP: St. Gołąb. Sur la représentation conforme de l'espace de Finsler sur l'espace euclidien*, CR, t. 196, 27—29.

[141] *Sur les espaces de Finsler*, CR, t. 196, 582—586; [207, 209], pt. 3, 1245—1248.

[141a] *Observations sur le mémoire précédent* (lettre à D. D. Kosambi), MZ, Bd. 37, 619—622; [207, 209], pt. 3, 1249—1252.

1934

[142] *Les espaces de Finsler*, Exposés de géométrie, vol. II, Hermann, Paris.

[142a] *Remarques au sujet d'une communication de M. André Weil «Une propriété caractéristique des groupes de substitutions linéaires finis»*, CR, t. 198, 1739—1740.

[142b] *Remarques au sujet de la communication d'A. Weil*, CR, t. 198, 1742—1743; [207, 209], pt. 1, 1257—1258.

[143] *Le calcul tensoriel en géométrie projective*, CR, t. 198, 2033—2037; [207, 209], pt. 3, 1253—1257.

[143a] *La théorie unitaire d'Einstein—Mayer*, [207, 209], pt. 3, 1863-1875.

1935

[144] *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés*, Exposés de géométrie, vol. V, Hermann, Paris; [207, 209], pt. 3, 1259—1320. Русский перевод: *Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства*, Гостехиздат, М.—Л., 1933.

[145] *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, AMH, Bd. 11, 116—162; [207, 209], pt. 1, 1259—1305.

[145a] *Remarques au sujet d'une communication de M. L. Pontrjagin sur les nombres de Betti des groupes de Lie*, CR, t. 200, 1280—1281.

[146] *Observations sur une Note de M. G. Bouligand*, CR, t. 201, 702; [207, 209], pt. 3, 1321.

[147] *Le calcul tensoriel projectif*, МСб, т. 42, 131—148; [207, 209], pt. 3, 1323—1339.

[147a] *Sur une dégénerescence de la géométric euclidienne*, AF, Nantes, 128—130.

1936

[148] *La géométric de l'integrale* $\int F(x, y, y', y'')\,dx$, JM, t. 15, 43—69; [207, 209], pt. 3, 1341—1368.

[149] *Sur les champs d'accélération uniforme en Relativité restreinte*, CR, t. 202, 1125—1288; [207, 209], pt. 3, 1369—1372.

[150] *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie*, EM, t. 35, 177—200; Exposés de géométrie, vol. VIII, Hermann, Paris; [204], 235—258; [207, 209], pt. 1, 1307—1330.

[151] *Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne*, AC, Oslo, t. I, 92—103; [207, 209], pt. 3, 1373—1384.

1937

[152] *Les espaces de Finsler*, ТрС, вып. 4, 70—81; [207, 209], pt. 3, 1385—1396. Русский перевод: *Пространства Финслера*, ТрС, вып. 4, 82—94.

[153] *Les espaces à connexion projective*, ТрС, вып. 4, 147—159; [207, 209], pt. 3, 1397—1409. Русский перевод: *Пространства проективной связности*, ТрС, вып. 4, 160—173.

[154] *La topologie des espaces homogènes clos*, ТрС, вып. 4, 388—394; [207, 209], pt. 1, 1331—1337. Русский перевод: *Топология однородных замкнутых пространств*, ТрС, вып. 4, 395—402.

[155] *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Gauthier-Villars, Paris.

[156] *L'extension du calcul tensoriel aux géométries non-affines*, Annals of Mathematics, vol. 38, 1—13; [207, 209], pt. 3, 1411—1423.

[157] *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Gauthier-Villars, Paris; 2ème éd.: 1951. Русский перевод: *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера*, МГУ, Москва, 1963; 2-е изд.: Платон, Волгоград, 1998.

[158] *Le rôle de la géométrie analytique dans l'evolution de la géométrie*, Travaux du XI Congrès International de la Philosophie, t. 6, Hermann, Paris, 147—153.

[159] *Les groupes*, Encyclopédie Française, t. 1, pt. 3, I.66-1—I.66-8.

[160] *La géométrie et la théorie des groupes*, Encyclopédie Française, t. 1, pt. 3, I.88-12—I.90-2.

[161] *La géométrie riemannienne et ses géneralisations*, Encyclopédie Française, t. 1, pt. 3, I.90-3—I.90-8.

[161a] *Les problèmes d'équivalence*, Séminaire de Mathématique D, 11/I; [204], 113—136; [207, 209], pt. 2, 1311—1334.

[161b] *La structure des groupes infinis*, Séminaire de Mathématique G-H, 1/3, 15/3; [207, 209], pt. 2, 1335—1384.

1938

[162] *Les représentations linéaires des groupes de Lie*, JM, t. 17, 1—12; [204], 153—164; [207, 209], pt. 1, 1339—1251.

[163] *Les espaces généralisés et l'integration de certaines classes d'équations différentielles*, CR, t. 206, 1689—1693; [207, 209], pt. 3, 1425—1429.

[164] *Leçons sur la théorie des spineurs* I, II, Exposés de géométrie, vol. XI, Hermann, Paris. Русский перевод: *Теория спиноров*, ИИЛ, Москва, 1947; 2-е изд.: Платон, Волгоград, 1997. Английский перевод: *The theory of spinors*, MIT, Cambridge, Mass., 1966; 2nd ed.: Dover, New York, 1981.

[165] *La théorie de Galois et ses généralisations*, CH, t. 11, 9—25; [207, 209], pt. 3, 123—139.

[166] *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, AM (4), t. 17, 177—191; [207, 209], pt. 3, 1431—1445.

1939

[167] *Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, MZ, t. 45, 335—367; [207, 209], pt. 3, 1447—1479.

[168] *Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces*, Actes du Congrès Mathématique de Liége, 30—41; [207, 209], pt. 3, 1481—1492.

[169] *Le calcul différentiel absolu et les problèmes recents de géométrie riemannienne*, Atti di Fondazione de Volta, t. 9, 443—461; [207, 209], pt. 3, 1493—1511.

1940

[170] *Sur un théorème de J. A. Schouten et W. van der Kulk*, CR, t. 211, 21—24; [207, 209], pt. 2, 1307—1310.

[171] *Sur les groupes linéaries quaternioniens*, Vierteljahrsschrifte der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 85, 191—203; [207, 209], pt. 2, 251—263.

[172] *Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et 9 dimensions*, Revista Uvivepsidad Nacional de Tucuman (A), t. 1, 5—22; [207, 209], pt. 3, 1513—1530.

1941

[173] *Sur les surfaces admettant une seconde forme fondamentale donnée*, CR, t. 212, 825—828; [207, 209], pt. 3, 1531—1534.

[174] *La geometrie de las ecuaciones diferenciales de tercer orden*, Revista Matematica Hispano-Americana (1), t. 4, 1—31; [207, 209], pt. 3, 1535—1565.

[175] *La notion d'orientation dans les différentes géométries*, BS, t. 69, 47—70; [207, 209], pt. 3, 1367—1370.

1942

[176] *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales*, BSc (2), t. 66, 55—85; [207, 209], pt. 3, 1591—1621.

[177] *Les surfaces isotropes d'une quadrique de l'espace à sept dimensions*, In Memoriam N. I. Lobatschevskii, вып. 3, КГУ, Казань, т. 1, 10—119. (В [207, 209] указывается как неопубликованная рукопись.)

1943

[178] *Sur une classe d'espaces de Weyl*, AS (3), t. 60, 1—16; [207, 209], pt. 3, 1621—1636.

[179] *Les surfaces qui admettent une seconde forme fondamentale donnée*, BSc (2), t. 67, 8—32; [207, 209], pt. 3, 1637—1661.

1944

[180] *Sur une classe de surfaces apparentées aux surfaces R et aux surfaces de Jonas*, BSc, t. 68, 41—50; Сборник, посвященный памяти академика Д. А. Граве, Гостехиздат, М.—Л., 1940, 72—78; [207, 209], pt. 3, 1663—1672.

1945

[181] *Les systèmes différentiels exterieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris. Русский перевод: *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения*, МГУ, Москва, 1962.

[182] *Sur un problème de géométrie différentlelle projective*, AS (3), t. 62, 205—231; [207, 209], pt. 3, 1637—1669.

1946

[183] *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2ème éd, Gauthier-Villars, Paris; переиздания: 1951, 1963. Английский перевод: *Geometry of Riemanman spaces*, Lie groups, History, Frontiers, and Applications, vol. 13, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1983.

[184] *Quelques remarques sur les 28 bitangentes d'une quartique plane et les 27 droites d'une surface cubique*, BSc (2), t. 70, 42—45; [207, 209], pt. 1, 1353—1356.

1947

[185] *Sur l'espace anallagmatique réel à n dimensions*, AP, t. 20, 266—278; [207, 209], pt. 3, 1701—1713.

[185a] *La theorie des groupes*, Alençon, Paris.

1949

[186] *Deux théorèmes de géométric ananagmatique réelle à n dimensions*, AM (4), t. 28, 1—12; [207, 209], pt. 3, 1715—1726.

Работы Картана по истории науки и его воспоминания

1931

[187] *Notices sur les travaux scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris; 2ème éd.: 1974; [204], 15—112; [207, 209], pt. 1, 1—101.

1937

[188] *Discours prononcé à l'inauguration d'un buste élevé à la mémoire de Gaston Darboux a Nîmes le dimanche* 22 *octobre* 1933, Notices et discourses Acad. Sc. Paris, 1924—1936, 437—478.

1939

[189] *Allocution à la Sorbonne* 18 *mai* 1939, Jubilé scientifique de M. Élie Cartan célebré à la Sorbonne 18 mai 1939, Gauthier-Villars, Paris, 51—59; [AR], 275—279. Русский перевод: наст. изд., Приложение 1.

1940

[190] *Le rôle de la France dans le développement des mathématiques*, PIB, t. 51 (65), 1992, 2—21. Сербский перевод: *Улога Француске у развоју математике*, Сатурн, № 4—5, 81—96, № 6—7, 120—144; 2-е изд.: Југословенско Астромомско Друштво, Београд, 1941. Английский перевод: *The Influence of France in the Development of Mathematics*, [AR], 281—301. Русский перевод: наст. изд., Приложение 2.

1941

[191] *Charles Maurain*, Jubilié de Charles Maurain, Paris, 5—14.

1942

[192] *Notice nécrologique sur Tultio Levi-Civita*, CR, t. 215, 233—235.

1943

[193] *Notice nécrologique sur Georges Giraud*, CR, t. 216, 516—519.

1946

[194] *Notice nécrologique sur Antoine-François-Jacques-Justin-Georges Perrier*, CR, t. 222, 421—423.

[195] *Notice nécrotogique sur Thomas Hunt Morgan*, CR, t. 222, 705—706.

[196] *Notice nécrologique sur Leon Alexandre Guinet*, CR, t. 222, 1149—1151.

[197] *Notice nécrologique sur Simon Flexner*, CR, t. 222, 1265—1266.

[198] *Notice nécrologique sur Louis Martin*, CR, t. 222, 1417—1419.

[198a] *Gaspard Monge. Sa vie, son œuvre*, CR, t. 223, 1049—1054.

[199] *Notice nécrologique sur Paul Langevin*, CR, t. 223, 1069—1072.

[200] *L'œuvre scientifique de M. Ernest Vessiot*, BS, t. 75, 1—8.

1948

[201] *Un centenaire*; *Sophus Lie*, Les grands courants de la pensée mathématique, Cahiers du Sud, Fontenay-aux-Roses, 253—257; 2ème éd.: t. 1, Paris, 1962. Английский перевод: Great Currents of Mathematical Thought, vol. 1, New York, 1971, 262—267. Русский перевод: наст. изд., Приложение 3.

[202] *Gaspard Monge. Sa vie, son œuvre*, Alençon, Paris.

1949

[203] *La vie et l'œuvre de Georges Perier*, Annuaire Bureau des Longitudes, Paris, C1—C4.

Собрания сочинений и сборники работ Картана

1939

[204] *Selecta. Jubilé scientifique de M. Élie Cartan*, Gauthier-Villars, Paris.

[205] *Группы голономии обобщенных пространств. Теория групп и геометрия. Метрические пространства, основанные на понятии площади*, КГУ, Казань; VIII Международный конкурс на соискание премий имени Н. И. Лобачевского, КГУ, Казань, 1940, 59—194.

1949

[206] *Геометрия групп Ли и симметрические пространства*, ИИЛ., М.

1952—1955

[207] *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, pt. 1: *Groupes de Lie*, 1952; pt. 2: *Algèbre*; *systèmes différentiels et problèmes d'équivalence*, 1953; pt. 3: *Géométrie différentielle*; *divers*, 1955.

1962

[208] *Пространства аффинной, проективной и конформной связности*, КГУ, Казань; 2-е изд.: Платон, Волгоград, 1—998.

1984

[209] *Œuvres complètes*, CNRS, Paris, pt. 1: *Groupes de Lie*; pt. 2: *Algèbre. Formes différentlelles et systèmes différentiels*; pt. 3: *Géométrie différentielle*; *divers*.

1986

[210] *On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity*, Bibliopolis, Naples.

1998

[211] *Избранные труды*, МЦНМО, Москва.

Научная переписка Картана

1975

[212] *Lettres d'É. Cartan à G. Tzitzeica, A. Pantazi et G. Vranceanu, Élie Cartan*, 1869—1951, Hommage de l'Acad. de République Sociatiste de Roumante, à l'occasion du centenaire de sa natessance, Editura Acad. R.S.R, Bucureşti, 83—116.

1979

[213] *Élie Cartan — Albert Einstein letters on absolute parallelism* 1929—1932, University Press, Princeton.

Список литературы

Дополнительные сокращения

ДАН — Доклады Академии наук СССР
ИАН — Известия Академии наук СССР, серия математическая
ИВ — Известия высших учебных заведений, Математика
ИНТ — Итоги науки и техники
МП — Математика: Сборник переводов
СМЖ — Сибирский математический журнал
ТГС — Труды геометрического семинара Казанского университета
ТМО — Труды Московского математического общества
УМН — Успехи математических наук
УЗА — Ученые записки Азербайджанского университета, серия физ.-мат. наук
УЗК — Ученые записки Казанского университета
ČP — Časipis pro Pestovaí Matematlky
JBD — Jahresbencht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
JDG — Journal of Differential Geometry
MI — Matematical Intelligencer
PM — Publications Mathimatique de Institut des Hautes Etudes Scientifiques
SBB — Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin
SBW — Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien
TAM — Transactions of the American Mathematical Society

[Аб1] *Аббасов Н.Т.* Бикомплексные эллиптические пространства // УЗА. 1962. №2. С. 3—9.

[Аб2] *Аббасов Н.Т.* Бикватернионные эллиптические пространства // УЗА. 1963. №2. С. 3—9.

[Ак1] *Акивис М.А.* Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // МСб. 1952. Т. 31, №1. С. 43—75.

[Ак2] *Акивис М.А.* Фокальные отображения поверхности ранга *r* // ИВ. 1957. №1. С. 9—19.

[Ак3] *Акивис М.А.* О многомерных поверхностях, несущих сеть сопряженных линий // ДАН. 1961. Т. 139. С. 1279—1282.

[Ак4] *Акивис М.А.* О конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // МСб. 1958. Т. 53, №4. С. 399—420.

[Ак5] *Акивис М.А.* Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // ДАН. 1962. Т. 146. С. 515—518.

[Ак6] *Акивис М.А.* О структуре двухкомпонентных сопряженных систем // ТГС. 1966. Т I. С. 7—31.

[Ак7] *Акивис М.А.* Локальные алгебры многомерной три-ткани // СМЖ. 1976. Т. 17, №1. С. 5—11.

[Ак8] *Акивис М.А.* О дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor. 1982. V. 38. P. 273—282.

[Ак9] *Акивис М.А.* О многомерных сильно параболических поверхностях // ИВ. 1987. №5. С. 3—10.

[Ак10] *Акивис М.А.* Проективно-дифференциальная геометрия подмногообразий // Тезисы докладов IX Всесоюзной геометрической конференции. Кишинев, 1988. С. 6—7.

[АР] *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Комментарии к статье Эли Картана «Изотропные поверхности квадрики 7-мерного пространства» // [177]. С. 95—119.

[АШ] *Акивис М.А., Шелехов А.М.* Основы теории тканей. Калинин: КГУ, 1981.

[Ау] *Ауссем М.В.* Метрические пространства n измерений, основанные на понятии площади m-мерной поверхности // ДАН. 1951. Т. 80. С. 701—704.

[Баз] *Базылев В.Т.* Об одном классе многомерных поверхностей // ИВ. 1961. №1. С. 27—35.

[Бел] *Бельтрами Э.* Опыт интерпретации неевклидовой геометрии // [ОГ]. С. 180—212.

[БГГН] *Березин Ф.А., Гельфанд И.М., Граев М.И., Наймарк М.А.* Представления групп // УМН. 1956. Т. 11, №6. С. 13—40.

[Бл] *Бляшке В.* Лекции по интегральной геометрии // УМН. 1938. Вып. V. С. 97—149.

[Бол] *Больаи Я.* Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида. М.—Л: Гостехиздат, 1950.

[Бу] *Бурбаки Н.* Элементы математики. Кн. 1: Теория множеств. Кн. 2: Алгебра. Кн. 3: Общая топология. Кн. 4: Функции одного вещественного переменного. Кн. 5: Топологические векторные пространства. Кн. 6: Интегрирование. Кн. 7: Коммутативная алгебра. Кн. 8: Группы и алгебры Ли. Кн. 9: Спектральные теории. М.: Физматгиз: Мир, 1960—1972.

[БН] *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Проективные инварианты нормализованной поверхности // ДАН. 1948. Т. 60. С. 1309—1312.

[Ваг1] *Вагнер В.В.* О теории псевдогрупп преобразований // ДАН. 1950. Т. 72. С. 453—456.

[Ваг2] *Вагнер В.В.* Алгебраическая теория дифференциальных групп // ДАН. 1951. Т. 80. С. 845—848.

[ВдВ] *Ван дер Варден Б.Л.* Классификация простых групп Ли // УМН. 1938. Вып. IV. С. 258—274.

[Вас1] *Васильев А.М.* Инвариантые аналитические методы в дифференциальной геометрии // ДАН. 1951. Т. 79, № 1. С. 5—7.

[Вас2] *Васильев А.М.* Дифференциальные алгебры и дифференциально-геометрические структуры // Труды геометрического семинара. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1973. С. 217—230.

[Вас3] *Васильев А.М.* Теория дифференциально-геометрических структур. М.: МГУ, 1987.

[Вед1] *Ведерников В.И.* Симметрические пространства и сопряженные связности // УЗК. 1965. Т. 125, № 1. С. 7—59.

[Вед2] *Ведерников В.И.* Об одном специальном классе однородных пространств // ИВ. 1972. № 12. С. 117—122.

[Ве] *Вейль А.* Интегрирование на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1960.

[Вей1] *Вейль Г.* Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований // УМН. 1938. Т. 1, № 4. С. 201—246.

[Вей2] *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИИЛ, 1947.

[Вил] *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.

[Вин] *Винберг Э.Б.* Конструкция особых простых алгебр Ли // ТрС. 1966. Вып. 13. С. 7—9.

[Вол] *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.

[Гал] *Галуа Э.* Из теории чисел. Часть исследований по теории перестановок и алгебраических уравнений // Сочинения. М.—Л.: ОНТИ, 1936. С. 35—43.

[Гау1] *Гаусс К.Ф.* Труды по теории чисел. М.: АН СССР, 1959.

[Гау2] *Гаусс К.Ф.* Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии // [ОГ]. С. 101—120.

[Гел] *Гельфанд И.М.* Сферические функции на симметрических римановых пространствах // ДАН. 1950. Т. 70. С. 5—8.

[ГеГ] *Гельфанд И.М., Граев М.И.* Унитарные представления вещественных простых групп Ли // ДАН. 1952. Т. 86. С. 461—463.

[ГГВ] *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и теория представлений. М.: Физматгиз, 1962.

[ГеН1] *Гельфанд И.М., Наймарк М.А.* Унитарные представления группы Лоренца // ИАН. 1947. Т. 11, вып. 5. С. 411—504.

[ГеН2] *Гельфанд И.М., Наймарк М.А.* Унитарные представления классических групп. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. (Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова; Т. 36).

[ГеР] *Гельфанд И.М., Райков Д.А.* Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп // МСб. 1943. Т. 13, № 2—3. С. 301—316.

[Гил] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

[Гин] Гиндикин С. Г. Комплексный мир Роджера Пенроуза // Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2006. С. 447—464.

[Гр] *Граев М.И.* Унитарные представления вещественных простых групп Ли // ТМО. 1958. Т. 7. С. 335—389.

[Дын1] *Дынкин Е.Б.* Структура полупростых групп Ли // УМН. 1947. Т. 2, № 4. С. 59—127.

[Дын2] *Дынкин Е.Б.* Некоторые свойства систем весов полупростых алгебр Ли // ДАН. 1950. Т. 71. С. 221—224.

[Ев] *Евтушик Л.Е.* Геометрия интеграла $\int F(x^n, x^\alpha, x^n_\alpha, x^n_{\alpha,\beta})\, dx^1 \ldots$ $\ldots dx^{n-1}$ // Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки. 1958. № 6. С. 114—118.

[Жел] *Железина И.И.* Квазинеевклидова геометрия как комплексная евклидова геометрия // Ученые записки МГПИ им. Ленина. 1965. С. 233—240.

[Заб] *Заблоцких Н.М.* Октавные геометрии с классическими фундаментальными группами // Ученые записки МОПИ им. Крупской. 1969. Т. 253. С. 62—76.

[Кан1] *Кантор И.Л.* Транзитивно-дифференциальные группы и инвариантные связности на однородных пространствах // ТрС. 1966. Вып. 13. С. 310—398.

[Кан2] *Кантор И.Л.* Некоторые обобщения йордановых алгебр // ТрС. 1972. Вып. 16. С. 407—499.

[КаЭ] *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М.: Мир, 1980.

[Кац1] *Кац В.Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста // ИАН. 1968. Т. 32, № 6. С. 1323—1367.

[Кац2] *Кац В.Г.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993, 426 с.

[Кле1] *Клейн Ф.* О так называемой неевклидовой геометрии // [ОГ]. С. 253—303.

[Кле2] *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангерская программа») // [ОГ]. С. 399—434.

[Кли] *Клиффорд В.К.* Предварительный очерк бикватернионов // Здравый смысл точных наук. П., 1922. С. 203—221.

[Коб] *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.

[Ков] *Ковальский О.* Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1985.

[Коз] *Картан Э.* Интегральные инварианты. *Козлов В.В.* Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана. М.: УРСС, 1998.

[Ком] *Комраков Б.П.* Однородные пространства, порожденные автоморфизмами, и инвариантные геометрические структуры // ИНТ. Проблемы геометрии. 1975. Т. 7. С. 81—104.

[Кот1] *Котельников А.Л.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань: Унив., 1895.

[Кот2] *Котельников А.Л.* Проэктивная теория векторов. Казан. ун-т, 1899.

[Кэл] *Кэли А.* Шестой мемуар о формах // [ОГ]. С. 222—252.

[Лап1] *Лаптев Г.Ф.* Инвариантное построение проективно-дифференциальной геометрии поверхности // ДАН. 1949. Т. 165. С. 121—124.

[Лап2] *Лаптев Г.Ф.* О полях геометрических объектов на погруженных многообразиях // ДАН. 1951. Т. 78. С. 197—200.

[Лап3] *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // ТМО. 1953. Т. 2. С. 275—382.

[Лес] *Лесовой Б.В.* Мера площади в двухпараметрическом семействе кривых на поверхности // ТрС. 1948. Вып. 6. С. 447—493.

[Лис] *Листинг И.Б.* Предварительные исследования по топологии. М.: Гостехиздат, 1932.

[Лоб] *Лобачевский Н.И.* О началах геометрии // Сочинения. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1946. С. 185—261.

[Лу] *Лумисте Ю.Г.* О n-мерных поверхностях с асимптотическими полями p-направлений // ИВ. 1959. № 1. С. 105—113.

[Мал] *Мальцев А.И.* Аналитические лупы // МСб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569—576.

[Мас] *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1965.

[Мин] *Миндинг Ф. А.* О внутренней геометрии поверхностей // [ОГ]. С. 162—179

[Мол] *Молин Ф. Э.* Числовые системы. Новосибирск: Наука, 1985.

[Мор] *Морозов В. В.* О максимальных неполупростых подгруппах простых групп: Дис... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1943.

[Нор1] *Норден А. П.* Об истолковании пространства с вырожденной метрикой // ДАН. 1945. Т. 50. С. 57—60.

[Нор2] *Норден А. П.* Обобщения геометрии двумерного линейчатого пространства // МСб. 1946, № 1. Т. 18. С. 139—152.

[Нор3] *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

[ОГ] Об основаниях геометрии / Под ред. А. П. Нордена. М.: Гостехиздат, 1956.

[Ос] *Остиану Н. М.* О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // ТГС. 1966. Т I. С. 239—263.

[ПВ] *Петер Ф., Вейль Г.* Полнота примитивных представлений замкнутой непрерывной группы // УМН. 1936. Вып. II. С. 144—160.

[Пол] *Половцева М. А.* Проективно-дифференциальная геометрия трехмерных многообразий: Дис... канд. физ.-мат. наук. М.: МГПИ, 1988.

[Пон1] *Понтрягин Л. С.* О числах Бетти групп Ли // ДАН. 1935. Т. 1. С. 433—437.

[Пон2] *Понтрягин Л. С.* Теория коммутативных топологических групп // УМН. 1936. Т. 1, № 2. С. 177—195.

[Пуа1] *Пуанкаре А.* Теория фуксовых групп // Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 9—62.

[Пуа2] *Пуанкаре А.* Об основных гипотезах геометрии // [ОГ]. С. 388—398.

[Пуа3] *Пуанкаре А.* Analysis Situs // Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1973. С. 457—548.

[Раш1] *Рашевский П. К.* Полиметрическая геометрия // ТрС. 1941. Вып. 5. С. 21—147.

[Раш2] *Рашевский П. К.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений в частных производных. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.

[Раш3] *Рашевский П. К.* Симметрические пространства с кручением // ТрС. 1959. Вып. 8. С. 182—192.

[Ри1] *Риман Б.* Теория абелевых групп // Сочинения. М.—Л.: ГТТЛ, 1948. С. 80—115.

[Ри2] *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии // Сочинения. М.—Л.: ГТТЛ, С. 279—293.

[Ри3] *Риман Б.* Фрагменты, относящиеся к analysis situs // Сочинения. М.—Л.: ГТТЛ, С. 294—296.

[Ро1] *Розенфельд Б.А.* Симметрические пространства и их геометрические приложения // [206]. С. 331—368.

[Ро2] *Розенфельд Б.А.* Компактная простая группа E как группа движений комплексной октавной неевклидовой плоскости // ДАН АзССР. 1954. Т. 10, № 12. С. 829—833.

[Ро3] *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. М.—Л.: Гостехиздат, 1955.

[Ро4] *Розенфельд Б.А.* Геометрическая интерпретация компактных простых групп Ли класса E // ДАН. 1956. Т. 106. С. 600—603.

[Ро5] *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.

[РЗТ] *Розенфельд Б.А., Замаховский М.П., Тимошенко Т.А.* Параболические пространства // ИНТ. Алгебра, топология и геометрия. 1988. Т. 26. С. 125—160.

[РК] *Розенфельд Б.А., Карпова Л.М.* Симметрические полуримановы пространства // ИВ. 1964. № 1. С. 100—116.

[Ру1] *Румянцева Л.В.* Кватернионная симплектическая геометрия // ТрС. 1963. Вып. 12. С. 287—314.

[Ру2] *Румянцева Л.В.* Квадрикватернионные эллиптические пространства // УЗА. 1963. № 3. С. 35—38.

[Ры1] *Рыжков В.В.* Сопряженные системы на многомерных поверхностях // УМН. 1956. Т. 11, № 4. С. 180—181.

[Ры2] *Рыжков В.В.* Тангенциально вырожденные поверхности // ДАН. 1960. Т. 135. С. 20—22.

[СМ] *Сабинин Л.В., Михеев П.О.* Об аналитических лупах // Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982. С. 102—109.

[Са57] *Савельев С.И.* Поверхности с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна // ДАН. 1957. Т. 115. С. 663—665.

[Са60] *Савельев С.И.* О поверхностях с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна // ИВ. 1960. № 1. С. 663—665.

[Сал] *Салтиков Н.* Живот и научни рад Эли Картана // Весник Друштва Мат. и Физ. Нар. Реп. Србије. 1952. Т. 4, № 3—4. С. 59—64.

[Сан] *Сантало Л.А.* Введение в интегральную геометрию. М.: ИИЛ, 1956.

[Стп] *Степанов Н.А.* Основные факты теории Ф-пространств // ИВ. 1967. № 3. С. 70—79.

[СхС] *Схоутен И.А., Стройк Д.Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. II. М.: ИИЛ, 1948.

[Фед1] *Феденко А.Г.* Симметрические пространства с простыми некомпактными фундаментальными группами // ДАН. 1956. Т. 108. С. 1026—1028.

[Фед2] *Феденко А.Г.* Пространства с симметриями. Минск: Госиздат, 1977.

[Фин] *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

[Фрд] *Фрейденталь Г.* Октавы, особые группы и октавная геометрия // МП. 1957. Т. 1, № 1. С. 117—153.

[Фро] *Фробениус Г.* Теория характеров и представления групп. Харьков: ДНТВУ, 1937.

[Шв] *Швейкин П.И.* Инвариантные построения на m-мерной поверхности n-мерного аффинного пространства // ДАН. 1958. Т. 121. С. 811—814.

[Шев] *Шевалле К.* О некоторых простых группах // МП. 1958. Т. 2, № 1. С. 3—53.

[ШиА1] *Широков А.П.* Пространства над ассоциативными унитальными алгебрами // УЗК. 1963. Т. 123, № 1. С. 222—247.

[ШиА2] *Широков А.П.* О симметрических пространствах, определяемых коммутативными алгебрами четвертого порядка // УЗК. 1966. Т. 126, № 1. С. 60—69.

[Ши1] *Широков П.А.* Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в Riemann'овых пространствах // ИКО (2). 1925. Т. 25. С. 86—114.

[Ши2] *Широков П.А.* Об одном типе симметрических пространств // МСб. 1957. Т. 41, № 3. С. 361—372.

[Яг] *Яглом И.М.* Тангенциальная метрика в двухпараметрическом семействе кривых на плоскости // ТрС. 1949. Вып. 7. С. 341—361.

[Ab] *Abel N.H.* Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générates qui passent le quatrième degré // JR. 1826. Bd. 1. S. 5—27.

[AG1] *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North Holland, 1993.

[AG2] *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Conformal differential geometry and its generalizations. New York—Toronto: Wiley Interscience Publ., 1996.

[AG3] *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Algebraic aspects of web geometry // Commentarii Mathem. Univer. Carolinae. 2000. V. 41, №2. P. 205—236.

[AG4] *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Differential geometry of varieties with degenerate Gauss maps. New York: Springer-Verlag, 2004.

[AR] *Akivis M. A., Rosenfeld B. A.* Élie Cartan (1869—1951). Providence, RI: AMS, 1993.

[ASh] *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Geometry and algebra of multidimensional three-webs. Dordrecht: Kluwer Acad. Publish., 1992.

[Bag] *Bargmann V.* Irreducible unitary representations of the Lorentz group // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 568—640.

[Beg1] *Berger M.* Classification des espaces homogénes symétriques irréductibles // CR. 1955. T. 240. P. 2370—2372.

[Beg2] *Berger M.* Les espaces symétriques noncompacts // AS (3). 1957. T. 74, №2. P. 85—117.

[Bew1] *Berwald L.* Über Paralletuberiragung in Räumen mit allgemeinen Maßbestimmung // JBD. 1926. Bd. 34. S. 212—220.

[Bew2] *Berwald L.* Über zweidimensionale allgemeine metrische Raume // JR. 1926. Bd. 156. S. 191—210.

[Bew3] *Berwald L.* Über Finslersche und verwandte Räume // ČP. 1936. T. 64. P. 1—16.

[Bet] *Betti E.* Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni // AM. 1871. T. 4. P. 140—158.

[Bla1] *Blaschke W.* Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 1911. Bd. 60. S. 61—91.

[Bla2] *Blaschke W.* Einführung in die Geometrie der Waben. Basel—Stuttgart: Birkhäuser, 1955.

[BlaB] *Blaschke W., Bol G.* Geometrie der Gewebe. Berlin: Springer, 1938.

[BlaT] *Blaschke W.* Topologische Fragen der Differentialgeometrie, 1—LXVI // MZ, AMH. 1928—1934.

[Bol1] *Bol G.* Über 3-Gewebe in vierdimensionalen Raum // MA. 1935. Bd. 110. S. 431—463.

[Bol2] *Bol G.* Gewebe und Gruppen // MA. 1937. Bd. 114. S. 414—431.

[Bor] *Borel A.* Le plan projectif des octaves et les sphères comme les espaces homogènes // CR. 1950. T. 230. P. 1378—1380.

[BoT] *Borel A., Tits J.* Groupes réductifs // PM. 1965. T. 27. P. 659—756.

[Bry] *Bryant R.L, Chern S.S., Gardner R.B., Goldschmidt H.L., Griffiths P.A.* Exterior differential systems. New York: Springer, 1991.

[Buf] *Buffon G.L.* Essai d'arithmétique morale. Paris: Histoire Naturelle, 1777.

[CaE] *Cartan H., Eilenberg S.* Homological algebra. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1956.

[CPS] Quasigroups and loops: Theory and applications / Chein O., Pflugfelder H.O., Smith J.D.H. (eds). Berlin: Heldermann, 1990.

[Chr] *Chern S.S.* Selected papers. V. 1—4. Berlin—New York: Springer-Verlag, 1978—1989.

[Chr1] *Chern S.S.* Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannifaltigkeiten in R_{2r} // AMH. Bd. 11, № 1—2. S. 333—358.

[Chr2] *Chern S.S.* On integral geometry in Klein spaces // Ann. Math. 1942. V. 43. P. 178—189.

[Chr3] *Chern S.S.* Pseudo-groupes continus infinis // Colloque de Géometrie Différentielle. Strasbourg, 1954. P. 119-136.

[ChC] *Chern S.S., Chevalley C.* Élie Cartan and his mathematical work // Bull. Amer. Math. Soc. 1952. V. 58. P. 217—250;

[ChM] *Chern S.S., Moser J.K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. P. 219—272. См. также: [Chr]. V. 3. P. 209—262.

[ChE] *Chevalley C., Eilenberg S.* Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63. P. 85—124.

[Cli] *Clifford W.K.* Applications of Grassmann's extensive algebra // AJ. 1878. V. 1. P. 350—358.

[Col] *Coleman A.J.* The greatest mathematical paper of all times // MI. 1989. V. 11. P. 29—38.

[Cot] *Cotton E.* Généralisation de la théorie du trièdre mobile // BS. 1905. T. 33. P. 42—64.

[Cox1] *Coxeter H.S.M.* Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 588—621.

[Cox2] *Coxeter H.S.M.* Discrete groups generated by reflections // [Wey3]. P. 186—212.

[Cro] *Crofton M.W.* On the theory of local probability // Trans. Roy. Soc. London. 1868. V. 158. P. 181—199.

[Da] *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et applications gèomètriques du calcul infinitésimal. V. 1. Paris: Gautthier—Villiars, 1914.

[Ded] *Dedekind R.* Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten Größen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. 1885. S. 141—159.

[Dem1] *Demoulin A.* Sur l'emploi d'un tétraèdre de référence mobile en Géométrie Cayteyenne // CR. 1904. T. 139. P. 393—396.

[Dem2] *Demoulin A.* Principes de géométrie anallagmatique et de géométrie réglée // CR. 1905. T. 140. P. 1526—1529.

[Di] *Dieudonné J.* Cartan Élie // Dictionary of Scientific Biography. V. 3. New York: Scribner, 1971. P. 95—96.

[Eh1] *Ehresmann Ch.* Sur la topologie de certains espaces homogènes // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 396—443.

[Eh2] *Ehresmann Ch.* Espaces fibrés de structure comparable // CR. 1942. T. 214. P. 144—148.

[EM] *Eilenberg S., MacLane S.* Cohomology theory in abstract groups I, II // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 51—78, 326—341.

[ECM] Élie Cartan et les mathématiques d'aujourdhui (Lyon 1984) // Asterisque. Numéro hors série. Paris, Société Mathématique de France, 1985.

[Fan] *Fano G.* Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometriisches Einteilungsprinzip // Enzyklopädie der matematischen Wissenschaften. Bd. 3. Leipzig: Teubner, 1897—1910. P. 289—388.

[Fin] *Finsler P.* Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen: Dissertation. Göttingen, 1918.

[Frn] *Frenet J.F.* Sur quelques propriétés courbes à double courbure // JM. 1852. T. 17. P. 365—372.

[Frd] *Freudenthal H.* Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I, II // PNA. 1954. T. A57. P. 218—230, 363—368; III, IV // PNA. 1955. T. A58. P. 151—157, 277—285; X, XI // PNA. 1963. T. A66. 457—487.

[Fro] *Fröhlicher A.* Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen // MA. 1955. Bd. 129. S. 50—95.

[Fu1] *Fubini G.G.* Il parallelismo di Clifford negli spazii ellittici // ASP. 1900. T. 9. P. 1—74.

[Fu2] *Fubini G.G.* Suite metriehe definite da una forma Hermitiana // Atti del Istituto Veneto. 1903. T. 63. P. 502—513.

[Gel] *Gelfand I.M.* Collected papers. V. 1—3. Berlin—New York: Springer-Verlag, 1984.

[Glb] *Goldberg V.V.* Theory of multicodimensional $(n+1)$-webs. Dordrecht: Kluwer, 1988.

[Gls1] *Goldschmidt H.L.* Existence theorems for analytic partial differential equations // Ann. Math. 1967. V. 86. P. 246—270.

[Gls2] *Goldschmidt H.L.* Prolongations of linear partial differential equations // AS (4). 1968. T. 1. P. 417—444, 617—625.

[Gls3] *Goldschmidt H.L.* Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations // JDG. 1969. V. 1, № 3. P. 269—307.

[Gra] *Grassmann H.* Das lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig: Wigand, 1844.

[GrH] *Griffiths P., Harris J.* Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1979. V. 12, № 3. P. 355—452.

[GW] *Gray A., Wolf J.A.* Homogeneous spaces defined by Lie group automorphism // Diff. Geom. 1968. V. 2. P. 77—159.

[Had] *Hadamard J.* Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions // BSc (2). 1901. T. 25. P. 57—60.

[Hal] *Halphen G.H.* Réduction d'équation différentielle linéaire aux formes intégrables // Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des Sciences de Paris. 1884. T. 28. P. 1—301.

[Har1] *Harish-Chandra.* Infinite irreducible representations of the Lorentz group // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1947. V. 189. P. 372—401.

[Har2] *Harish-Chandra.* Representations of semisimple Lie groups I // TAM. 1953. V. 75. P. 185—243; II, III // TAM. 1954. V. 76. P. 26—65, 234—253; IV // AJ. 1955. V. 77. P. 743—777; V, VI // AJ. 1956. V. 78. P. 1—41, 564—628.

[Haw1] *Hawkins T.* Hypercomplex numbers. Lie groups and creation of the group representation theory // Archive for History of Exact Sciences. 1972. V. 8. P. 243—287.

[Haw2] *Hawkins T.* Non-Euclidean geometry and Weierstrassian mathematics: the background to Killing's work on Lie algebras // Historia Mathematica. 1980. V. 7, № 3. P. 289—342.

[Haw3] *Hawkins T.* Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras // Archive for History of Exact Sciences. 1982. V. 26. P. 126—192.

[Haw4] *Hawkins T.* Emergence of the theory of Lie groups. New York, Berlin a. o.: Springer-Verlag, 2000.

[Hoc] *Hochschild G.* On the cohomology groups of an associative algebra // Ann. Math. 1945. V. 46, № 1. P. 58—67.

[Hod] *Hodge W. V. D.* Élie Cartan (1869—1951) // J. London Math. Soc. 1953. V. 28. P. 115—119.

[Jan] *Janet M.* Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien // AP. 1926. T. 5. P. 38—75.

[Jo1] *Jordan C.* Traité sur les substitutions et des équations algébriques. Paris: Gauthier-Villars, 1870.

[Jo2] *Jordan C.* Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions // CR. 1874. T. 79. P. 795—797.

[Kah1] *Kähler E.* Über eine bemerkungswerte Hermitische Metrik // AMH. 1932. Bd. 9. S. 173—186.

[Kah2] *Kähler E.* Einführung in die Theorie der Systeme der Differentialgleichungen. Hamburg Univ., 1934.

[Kil1] *Killing W.* Erweiterung des Raumbegriffes. Programm. Lyceum Hosianum: Braunsberg, Ostpreussen, 1884.

[Kil2] *Killing W.* Die Zusammenzetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen // MA. 1888. Bd. 31. S. 252—390; 1889. Bd. 33. S. 1—48; 1889. Bd. 34. S. 57—122; 1890. Bd. 36. S. 161—189.

[Kli] *Klingenberg W.* Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen // MZ. 1954. Bd. 60. P. 384—406.

[Kot] *Kotelnikoff P.* Exponuntur formulae analyticae quibus perturbatio motus gyratori Terrae determinantur: Inauguralis Dissertatio. Dorpat Univ., 1932.

[Lag1] *Lagrange J. L.* Réflexions sur la résolution des équations // Œuvres. T. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1870. P. 205—421.

[Lag2] *Lagrange J. L.* Mémoire sur la théorie des variations des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites // Oeuvres. T. 6. Paris: Gauthier-Villars, 1875. P. 713—768.

[Led] *Ledger A. J.* Espaces de Riemann symétriques généralisés // CR (A). 1967. T. 264. P. 947—948.

[LeO] *Ledger A. J., Obata M.* Affine and Riemannian s-manifolds // JDG. 1968. V. 2, № 4. P. 451—459.

[LeC] *Levi-Civita T.* Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente spezificazione geometrica della curvatura Riemanniana // RC. 1917. T. 42. P. 173—205.

[Lev] *Levy H.* Forma canonica dei ds^2 per i quali si annulano i simboli di Riemann a cinque indici // RA. 1926. T. 3. P. 65—69.

[Lib1] *Libermann P.* Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales // AM. 1954. T. 36. P. 27—120.

[Lib2] *Libermann P.* Élie Cartan (1869—1951) // Travaux mathématiques de l'Université Luxembourg. 1996. № 8. P. 115—158.

[Lie1] *Lie S.* Über die Complexen, insbesonders Linien- und Kugelkomplexen // MA. 1872. Bd. 5. S. 209—256.

[Lie2] *Lie S.* Klassifikation und Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen // Archiv der Mathematik. 1883. Bd. 8. S. 187—288, 371—458; 1884. Bd. 9. S. 431—448.

[LiE] *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Bd. 1—3. Leipzig: Teubner, 1888—1893.

[Lip] *Lipschitz R.* Untersuchungen über die Summen der Quadraten: Dissertation. Bonn Univ., 1886.

[Loo] *Loos O.* Symmetric spaces. V. 1, 2. New York—Amsterdam: Benjamin, 1969. Русский перевод: *Лоос О.* Симметрические пространства. М.: Наука, 1985.

[Min] *Minkovski H.* Theorie der konvexen Körper, insbesonders Begründung des Oberflächenbegriffs // Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1. New York: Chelsea, 1967. S. 131—229.

[Moo] *Moody R.V.* A new class of Lie algebras // Journal of Algebra. 1968. V. 10. P. 211—230.

[Mou] *Moufang R.* Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D_g) // AMH. 1933. Bd. 9. S. 207—222.

[Nom] *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // AJ. 1954. V. 76, № 1. P. 33—65.

[Pe] *Peirce B.* Linear associative algebras // AJ. 1881. V. 4. P. 97—221.

[PeW] *Peter F., Weyl H.* Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen der geschlossenen komtinuierlichen Gruppen // Math. Ann. 1927. V. 97. P. 737—755. См. также: [Wey]. V. 3. P. 58—75.

[Pf] *Pflugfelder H.O.* Quasigroups and loops: Introduction. Berlin: Heldermann, 1990.

[Pl] *Plücker J.* Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die betrachtung der geraden Linien als Raumelement. Bd. 1, 2. Leipzig: Teubner, 1868—1869.

[Poi] *Poincaré H.* Œuvres. V. 1—11. Paris: Gauthier-Villars, 1928—1956.

[Poi1] *Poincaré H.* Sur les nombres complexes // CR. 1884. T. 99. P. 740—742.

[Poi2] *Poincaré H.* Sur les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // RC. 1907. T. 23. P. 185—220.

[Poi3] *Poincaré H.* Rapport sur les travaux de M. Cartan fait à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris // [AR]. P. 263—271.

[Poi4] *Poincaré H.* Analysis situs // J. École Polytech. 1895. T. 1. P. 1—121. См. также: [Poi]. V. 6. P. 193—288.

[Poi5] *Poincaré H.* Sur les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1907. V. 23. P. 185—220. См. также: [Poi]. V. 4. P. 249—289.

[Poi6] *Poincaré H.* Rapport sur les travaux de M. Cartan fait à la Faculté des Scinces de l'Université de Paris // Acta Math. 1921. V. 38. P. 137—145. См. также: [AR], appendix A.

[Pom] *Pommaret J.F.* Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups. New York: Gordon and Breach, 1978. Русский перевод: *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.

[Rei] *Reidemeister K.* Gewebe und Gruppen // MZ. 1928. Bd. 29. S. 427—435.

[Rh] *de Rham G.* Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions // JM. 1931. T. 10, f. 2. P. 115—200.

[Rib] *Ribaucour A.* Étude des elassoïdes or surfaces a courbure moyenne nulle // Mémoires couronnes Bruxelles. 1884. T. 45.

[Ro] *Rosenfeld B.A.* Geometry of Lie Groups. Dordrecht—Boston—London: Kluwer, 1997.

[RoZ] *Rosenfeld B.A., Zamakhovsky M.P.* Homogeneous k-symmetric spaces of interior type with simple real fundamental groups and their connections with parabolic spaces // PIB. 1996. V. 60 (74). P. 121—136.

[Row] *Rowe D.E.* Interview with Dirk Jan Struik // MI. 1989. V. 11, № 1. P. 14—26.

[Sag] *Sagle A.S.* Mal'cev algebras over fields of characteristic zero // Pacific J. Math. 1952. V. 12. P. 1857—1878.

[Sat] *Satake I.* On representation and compactification of symmetric Riemannian spaces // Ann. Math. 1960. V. 71, № 1. P. 77—110.

[Schl] *Schläfli L.* Nota alla Memoria del Signer Beltrami «Sugli spazi di curvatura costante» // AM. 1871—1873. V. 5. P. 178—193.

[Sch1] *Schouten J.A.* Über die verschiedene Arten der Übertragungen, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können // MZ. 1922. Bd. 23. S. 56—81.

[Sch2] *Schouten J.A.* Der Ricci-Kalkül. Berlin: Springer, 1924.

[Sch3] *Schouten J.A.* Über unitäre Geometrie // PNA. 1929. V. 32, № 4. P. 457—465.

[SeB] *Segre B.* Inforno al problema di Poincaré della representazione pseudoconforme // RA. 1931. T. 13, № 1. P. 678—683.

[Se1] *Segre C.* Geometria delle coniche di un piano rappresentano sulla geometria dei complessi di rette // Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1884—1885. T. 20. P. 487—504.

[Se2] *Segre C.* Varietà che rappresentano le coppie di punti di 2 plani o spazi // RP. 1891. T. 5. P. 192—204.

[Snf] *Senff C.E.* Theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum. Dorpat Univ., 1931.

[Srt] *Serret J.* Mémoire sur quelques formules rélàtives à la théorie des courbes à double courbure // JR. 1851. T. 16. P. 193—207.

[Svr] *Severi F.* Sulla curvatura delle superficie e varietà // RC. 1917. T. 42. P. 227—259.

[She] *Shelekhov A.M.* The G-structures associated to a hexagonal 3-web is dosed // Journal of Geometry. 1989. V. 35. P. 169—176.

[Som] *Sommerville D.M.Y.* Classification of geometries with projective metric // Proceedings of Edinburgh Mathematical Society. 1910—1911. V. 28. P. 25—41.

[Spe1] *Spencer D.C.* Overdetermined systems of linear partial differential equations // Bulletin of American Mathematical Society. 1965. V. 73. P. 1—114. Русский перевод: *Спенсер Д.* Переопределенные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Математика. 1970. Т. 14, №2. С. 66—90; Т. 14, №3. С. 99—126.

[Spe2] *Spencer D.C.* Deformation of structures defined by transitive continuous pseudogroup // Ann. Math. 1972. V. 76. P. 306—445; 1985. V. 81. P. 389—450.

[Sta] *von Staudt Ch.* Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer-Raspe, 1847.

[Str] *Strubecker K.* Differentialgeometrie des isotropen Räumes, I // SBW. 1941. Bd. 150. S. 1—53.

[Stu1] *Study E.* Theorie der gemeiner und höherer komplexen Größen // Enzyclopädie der Mathematischen Wisseschften. Bd. 1, Teil 1. Leipzig: Teubner. 1898—1904. P. 147—183.

[Stu2] *Study E.* Über nicht-Euklidische und Linien-Geometrie // JBD. 1902. Bd. 11. S. 313—340.

[Stu3] *Study E.* Geometrie der Dynamen. Leipzig: Teubner, 1903.

[Stu4] *Study E.* Kürzeste Wege im komplexen Gebiete // MA. 1905. Bd. 60. S. 321—347.

[Sy] *Synge A.L.* Generalisation of Riemannian line-element // TAM. 1925. V. 27. P. 61—67.

[Ta] *Taton R.* L'oeuvre scientifique de Monge. Paris, 1951.

[Tho] *Thomsen G.* Un teorema topologico sulie schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficle isotermo-asintotiche // Bolletino dell'Università Matematica de Bologna. 1927. T. 6. P. 80—85.

[Ti1] *Tits J.* Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie // Mémoires de l'Académie Royate Belgique Cl. de Sciences. 1955. T. 29, № 3.

[Ti2] *Tits J.* Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique // Bulletin de La Societe Mathematique Belgique. 1956. T. 8, № 1. P. 48—81.

[Ti3] *Tits J.* Sur la géométrie des R-espaces // JM (9). 1957. T. 36, № 1. P. 17—38.

[Ti4] *Tits J.* Groupes simples et géométries associées // AC, Stockholm, 1962. P. 197—221.

[Um] *Umlauf C.A.* Über die Zusammensetzungen der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, insbesonders der Gruppen vom Range Null: Inauguran Dissertation. Leipzig: Leipzig Univ., 1891.

[VW] *Veblen O., Whitehead J.H.C.* The foundation of differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ., 1932. P. 103—201. Русский перевод: *Веблен О., Уайтхед Дж.* Основания дифференциальной геометрии. М.: ИИЛ, 1949. См. также: *Whitehead J.H.C.* The mathematical works of J.H.C. Whitehead. V. I. Differential geometry. Oxford: Pergamon Press, 1962.

[Ves] *Vessiot E.* Sur les courbes minima // CR. 1905. T. 140. P. 1381—1384.

[Web] *von Weber E.* Zur Invariantentheorie der Systemen Pfaff'scher Gleichungen // SBS. 1898. Bd. 50. S. 207—229.

[Wei] *Weierstrass C.* Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebitdeten Größen (der Brief zu Schwarz H.A.) // Mathematische Werke. Bd. 2. Olms-New York: Hilcteskeim-Johnsen, 1970. S. 311—322.

[Wes] *Weiss E.* Oktaven. Engelscher Komplex. Trialitätsprinzip // MZ. 1938. Bd. 44. S. 580—611.

[Wey] *Weyl H.* Gessamelte Abhanglungen. Bd. I—IV. Berlin—New York: Springer-Verlag, 1950.

[Wey1] *Weyl H.* Reine Infinitesimaltheorie // MZ. 1918. Bd. 2, Hft. 3—4. S. 384—411.

[Wey2] *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. Berlin: Springer, 1918. 5-е изд.: 1923. Русский перевод: *Вейль Г.* Время, пространство, материя. М.: Янус, 1996.

[Wey3] *Weyl H.* The structure and representations of continuous groups: Mimeographcal edition with notes by R. Brauer. Princeton: Institute for Advanced Study, 1935.

[Wh] *Whitehead J. H. C.* Obituary: Élie Joseph Cartan (1869—1951) // [209]. Pt. 3. P. 1911—1935.

[Wig] *Wigner E.* On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149—204.

[Wil] *Wilczinsky E. J.* General projective theory of space curves // TAM. 1905. V. 6, № 2. P. 99—133.

[Win] *Winternitz A.* Über die affine Grundlage der Metrik einer Variationsproblem // SBB. 1930. P. 457—569.

[Wit] *Witt E.* Spiegelungsgruppen und Abzählung halbeinfacher Liescher Ringe // AMH. 1941. Bd. 14. P. 289—322.

[WG] *Wolf J. A.*, *Gray A.* Homogeneous Spaces Defined by Lie Group Automorphisms // J. Diff. Geom. 1968. V. 2, № 1—2. P. 77—159.

Приложение 1.
Э. Картан. Выступление на праздновании 70-летия

В заключение этой трогательной церемонии, после всех похвал, которыми вы осыпали меня и которых я, как я сознаю, совершенно не заслуживаю, разрешите мне обратиться мыслью к тем, кого больше нет и кто был бы так рад слышать это. Я думаю о моих отце и матери, скромных крестьянах, которые в течение своей долгой жизни дали своим детям пример радостного труда и мужества в преодолении трудностей. Мое детство убаюкивалось ударами по наковальне, раздававшимися каждое утро, начиная с самой зари, и я еще вижу мою мать, которая в мгновения, оставшиеся свободными от забот о детях и хлопот по хозяйству, работает за прялкой.

Вспоминая о родителях, я думаю и о моих первых учителях, преподавателях начальной школы в моей деревне Доломье, г-не Коллоне и, прежде всего, г-не Дюпюи; они дали более чем двум сотням мальчиков первоначальное образование, значение которого я смог оценить гораздо позднее. Я должен признать, и делаю это без всякого смущения, что я был отличным учеником; мог не задумываясь перечислить все супрефектуры в любом департаменте Франции, и никакие грамматические тонкости правил причастий прошедшего времени не ускользали от меня. Однажды кантональный делегат по имени Антонен Дюбо, который позднее стал одним из наиболее высокопоставленных лиц государства, приехал для инспекции школы. Этот визит определил всю мою жизнь. Инспектор решил, что я должен участвовать в конкурсе на стипендии в лицеях. Г-н Дюпюи управлял моей подготовкой с сердечным участием, которое я не забуду никогда. Все это заставило меня совершить прекрасную поездку в Гренобль, где я без особого труда сдал экзамены, оказавшиеся не слишком страшными. Мои блестящие успехи наполнили гордостью г-на Дюпюи, и благодаря поддержке г-на Дюбо, который в течение всей своей жизни с любовью вполне отеческой интересовался моей карьерой и моими успехами, я был награжден полной стипендией в коллеже Вьенна.

Таким образом, в возрасте десяти лет я с радостью покинул отчий дом, не подозревая, что уже через несколько дней я пожалею о том, что поте-

---

Allocution à la Sorbonne 18 mai 1939 // Jubilé scientifique de M. Élie Cartan célebré à la Sorbonne 18 mai 1939, Paris; Gauthier-Villars, 51—59.

рял. Я должен был привыкнуть к жизни в общежитиях, где мне пришлось провести более десяти лет. После пяти лет коллежа, где мне приходилось ограничивать себя скудной едой два раза в день, моя стипендия была переведена в Гренобльский лицей, где я закончил свое классическое образование риторикой и философией, а затем в лицей Жансона де Сайи, который совсем недавно открылся и все были в восхищении от успеха Ле Дантека, принятого первым в Нормальную школу.

В лицее Жансона у меня были замечательные преподаватели — Соломон Блош (по элементарной математике) и Эмиль Лакур (по специальной математике), который, как ты знаешь, мой дорогой Тресс, был известен не только как преподаватель, но славился и благородством характера. Именно в этом классе товарищем моим и Эжена Перро, который вместе со мной поступил в Нормальную школу, был Жан Перрен, который был младше нас, а впоследствии заслужил славу одного из крупнейших ученых Франции.

Мой дорогой Тресс, я с волнением вспоминаю наши годы в Нормальной школе. Прошло достаточно много времени, чтобы ты не приукрашивал свои воспоминания обо мне и о той роли, которую я играл среди своих товарищей. Насколько я припоминаю, на самом деле это было братское товарищество и сотрудничество, всегда достаточно тесное в год подготовки к кандидатским экзаменам. Я вижу как сейчас наши совместные вечерние занятия в каком-нибудь зале. И мы слушаем, как один из нас рассказывает лекцию, с которой он должен выступить на следующий день. Критика на этих занятиях была свободной, откровенной и очень полезной. Я вспоминаю, в частности, лекцию о пересечении квадрик, которая поразила нас такой элегантностью и новизной, что вопрос стал сразу понятен. Автором этой лекции был Артюр Тресс.

Ты сейчас говорил, мой дорогой друг, о том восхищении, в которое нас приводили курсы г-на Эмиля Пикара, которые отличались тем, что открывали нам широкие перспективы в области, новой для нас. В Нормальной школе наиболее глубокое влияние на нас производил Жюль Таннери загадочной артистичностью своей личности, быть может, своей приверженностью строгости, необходимость которой в математике он показывал нам как интеллектуальную добродетель, обеспечивающую правильность ее выводов и лояльность по отношению к ней самой. Как уже говорилось, Таннери был нашей совестью, мы любили его и поклоняемся его памяти.

Мы восхищались также изяществом некоторых лекций г-на Кёнигса, ясностью преподавания Гурса. В Сорбонне был отличавшийся прозрачностью курс теоретической механики Аппеля, несравненная элегантность курсов Дарбу. Наиболее глубокое впечатление на нас производили, быть

может, лекции Эрмита, лицо и глаза которого восхитительной красоты светились, как будто он созерцал глубину божественности вечного мира чисел и форм, о котором сейчас говорил г-н Пикар.

Таннери, Гурса, Аппель, Дарбу, Пикар, Эрмит — эти великие имена приводили в восхищение нашу юность. Я уже не говорю о математическом гиганте Анри Пуанкаре, лекции которого потрясали нас. Нет ни одной ветви современной математики, которая не испытала бы его влияния, и вы понимаете, что я особенно храню в своей памяти признательность за последний труд его так внезапно оборвавшейся жизни — доклад о моих научных работах. Из этой блестящей плеяды великих математиков остаетесь только Вы, дорогой мэтр. Мы всегда восхищались Вашей молодостью, и я счастлив тем, что мой возраст позволил мне услышать очерк моей научной карьеры от моего чудесного учителя, который полвека назад обучал меня математическому анализу, представлял мои первые заметки в академию и был оппонентом моей диссертации.

После защиты моей диссертации, тема которой, мой дорогой Тресс, была мне подсказана тобой после твоего возвращения из Лейпцига, где ты учился у Софуса Ли, я был назначен преподавателем в Монпелье. Я храню в моей памяти воспоминания о пятнадцати годах, которые я провел в провинции, сначала в Монпелье, а потом в Нанси и Лионе. Это были годы размышлений в тишине, и все, что я сделал позже, находилось в зародыше в работах, над которыми я размышлял в тот период.

В Нанси я впервые познакомился с большими аудиториями. Я преподавал там элементы анализа студентам Института электротехники и прикладной механики. Институт был еще молодым, но процветал под управлением Фогта, целиком посвятившего себя этому делу. Это преподавание сильно заинтересовало меня и принесло глубокое удовлетворение, когда я почувствовал контакт со студентами. Я обнаружил также, что подготовлен к преподаванию общей математики, чем я и занимался несколько позже в Сорбонне.

Преподавание в Институте было аналогично тому, которое я вел в Школе физики и химии в течение 29 лет.

В той мере, в которой я заслуживаю сердечных похвал, которые Ваша дружба, мой дорогой Ланжевен, расточала мне, я чрезвычайно счастлив, что смог помочь Вам реализовать выношенный в Вашем сердце замысел превратить техническую школу, которой Вы управляете, в подлинное высшее учебное заведение, дающее студентам высокую научную культуру. Эта задача такова, что может быть легко выполнимой с помощью постоянной взаимной симпатии, объединяющей учителя и внимательных учеников, желающих приобрести знания, полезные для их будущей ка-

рьеры. Я очень сожалею, что скоро покину эту Школу, с которой меня связывают такие узы; мой уход не сможет ослабить чувства восхищения, которые я испытываю к ученому и человеку, управляющему этой Школой.

В твоем сегодняшнем выступлении, мой дорогой Морен, которое очень тронуло меня тем, что это были слова друга и декана, сердечно почитаемого всеми его коллегами, ты проследил всю мою карьеру профессора Сорбонны.

Для меня всегда было большим удовольствием преподавать: меня всегда интересовал предмет, который я преподавал, — это условие необходимое и, быть может, достаточное для того, чтобы заинтересовать тех, кто слушает вас. Если моя предстоящая отставка не состарит меня преждевременно, мне было бы приятно время от времени выступать с циклами лекций, темы которых я пока еще не готов уточнить.

Большая часть моей карьеры профессора прошла в Нормальной школе; я служил там в течение 14 лет. Я служил там и в годы войны и принимал Вас, мой дорогой Жюлиа, когда Вы, тяжело раненый, после ряда операций, которым Вам пришлось подвергнуться в госпитале Валь-де-Грас, прибыли для отдыха в нашу старую Школу. Трудно представить себе более страшную картину, чем аудитория Нормальной школы в это время. Проблем тогда было много и я участвовал в решении некоторого их числа. Я был счастлив слышать ваши мнения, мои дорогие Брюа и Жюлиа, о том, что я особенно помогал моим тяжело раненым ученикам. Теперь они являются преподавателями и многие из них читают лекции на различных факультетах. Один из них, который, как и его товарищи по лицею Жансона, обращается ко мне со своими затруднениями, — один из самых молодых членов Академии наук.

Мы, старшее поколение, очень рады видеть, что многие выпускники Нормальной школы стали блестящими математиками. Мы уверены также, что Школа в течение долгого времени играла роль питомника математики и в свое время вдохновила Софуса Ли посвятить ей свой большой трактат по теории групп. Поэтому сыну Софуса Ли пришла в голову трогательная мысль отметить этот юбилей и прислать нам бюст своего отца. Не естественно ли будет поставить этот бюст в научной библиотеке Нормальной школы? Он будет напоминать последующим выпускам Школы о великом норвежском математике. Нормальную школу прославили «нормальены» Вессио, Тресс и Драш, которые учились у Софуса Ли в Лейпциге.

Мой дорогой Брюа, в мое сердце глубоко проникли слова о династии нормальенов-Картанов. Позвольте мне добавить к именам Анри Картана и Элен Картан имена еще двух нормальенов, которые особенно дороги

мне: первое из них — имя моего шурина Антуана Бьянкони, литератора, окончившего Нормальную школу в 1903 г.; смерть на поле битвы прервала его работу над философским сочинением, которое он обдумывал и которое обещало быть значительным. Второе имя — имя моей младшей сестры Анны Картан, успех которой на конкурсе при поступлении в Севрскую Нормальную школу наполнил меня радостной гордостью; она также была ученицей Жюля Таннери, о котором она не могла говорить без волнения. Она преждевременно закончила свою блестящую карьеру преподавателя в лицее в Севре. Мне приятно думать, что она в какой-то мере представлена здесь, когда я вижу среди нас компанию выпускниц, связанных нежной любовью с моей дорогой приятельницей — госпожой директрисой Севрской Нормальной школы.

Мой дорогой Жюлиа, я с готовностью присоединяюсь к Вашему проекту основать для молодых математиков учебный кружок — Ваш семинар, где эти молодые люди, работая совместно, излагали бы в течение года один важный вопрос математики. Вы сказали нам по этому поводу, что молодые чувствуют, возможно не вполне осознанно, необходимость опираться на старших. Слушая сегодня Дьедонне, мы поняли, насколько Вы правы.

Мой дорогой Дьедонне, Ваши слова, адресованные мне, тронули меня своей выразительностью. Они показывают, что Вы полны энтузиазмом молодости, добродетелью, которую я желаю Вам сохранить в течение всей Вашей жизни. Не является ли Ваш энтузиазм чрезмерным? Я не хотел бы противоречить Вам, но мой возраст достаточен для того, чтобы не принимать Ваши похвалы в полной мере; я хорошо знаю, что если бы я обладал всеми качествами, которые Вы мне приписываете, у меня отсутствовал бы ряд других качеств, позволяющих мне служить образованию и науке. Качества, которые Вы мне приписываете, несомненно, не присущи моей природе, и у меня нет желания их приобретать.

Мой дорогой Демулен, мы связаны старой дружбой и многочисленными общими воспоминаниями. Мы вместе слушали учителей, имена которых я вспоминал сегодня. Я очень тронут поздравлениями, которые Вы передали мне от иностранных ученых. В частности, я благодарю тех из них, которых вижу здесь и которые помогали в этой церемонии. Их присутствие дорого мне, а готовность ученых многих стран принять участие в моем юбилее глубоко тронула меня.

В сегодняшнем бурном мире нам необходимо сотрудничество, по крайней мере в области науки, которое следует поддерживать и сохранять, несмотря на все препятствия.

В то же время я адресую мою благодарность иностранным участникам — друзьям, коллегам и ученикам, ответившим на призыв юбилейного комитета. Я благодарю членов комитета, которые приняли участие в организации этого праздника, и прежде всего моего коллегу и друга Дармуа, который с помощью моего ученика Эресмана принял на себя самую тяжелую часть работы.

Многие выступавшие здесь, говоря о моей научной карьере, связывали ее с именем подруги моей жизни. В течение более 36 лет она является неугасимым пламенем, оживляющим семейный очаг. Наши дети приносили нам постоянно большую радость и оберегали нас от боли.

Мы никогда не забудем, как заботливо Комитет осуществил благоговейную мысль дать нам здесь, благодаря замечательному артисту, каким является г-н Шарль Мюнш, услышать душу нашего исчезнувшего сына, которого ты, мой дорогой Тресс, и вы, мои дорогие Жюлиа и Дьедонне, знали и воскрешали в памяти столь трогательными словами.

Церемония, которая прошла этим утром, где вы не отделяли человека от профессора-ученого, принесла нам с женой самую большую радость, которую мы еще можем испытать.

Приложение 2.
Э. Картан. Роль Франции в развитии математики

Математическая наука, как и всякая другая наука, является коллективным интернациональным делом, она представляет собой общее достояние всех цивилизованных наций, каждая из них вносит свой вклад в соответствии со своими силами, своей историей и своим развитием. Вряд ли кто-то из заметных французских математиков откажется воздать должные почести таким великим умам прошлого, как итальянец Галилей, англичанин Ньютон, немец Лейбниц, швейцарец Эйлер, норвежец Абель, немец Гаусс, немец Риман.

Я хотел бы попытаться вам показать сегодня, что отношение числа великих математических гениев к населению страны во Франции не уступает такому отношению в любой другой стране и что французы, благодаря своим великим математикам, внесли в создание математики наиболее важный вклад.

Для меня большая честь и радость быть приглашенным сегодня выступить перед дружественной публикой, в стране, столь связанной с моей. Мне придется сделать выбор, выделив некоторую часть из того, о чем я мог бы сказать, и я извиняюсь за это перед вами. Я извиняюсь также за то, что вынужден пользоваться техническими терминами; я не смогу также задерживаться на точных определениях, но это и не очень интересно для вас.

В математике, как и во всякой науке, имеется два вида ученых. С одной стороны, великие ученые, открывающие новые широкие дороги, приносящие новые идеи, часто достаточно простые, о которых раньше никто не помышлял; и другие, которые на обширной территории, открытой первыми для обработки, разводят сады, собирают там плоды, часто вкусные, пожинают злаки, часто великолепные. Роль этих ученых очень важна, даже необходима; но понятно, что человечество, и вполне резонно, удерживает в памяти имена только первых ученых. О них-то я и буду рассказывать вам сегодня.

«Король Генрих IV, — рассказывает Жозеф Бертран, — принимая в своем дворце Фонтенбло посла Генеральных Штатов Голландии, снис-

---

Le rôle de la France dans le développement des mathématiques // Publications de l'Institut Mathematique de Belgrade. 1992. T. 51 (65). P. 2—21.

ходительно перечислял прекрасных французских гениев, которые одолели своих соперников в литературе, искусствах и великих делах. «Я восхищаюсь, как и Вы, — ответил голландец, который претендовал на знание геометрии, — но Франция до сих пор не породила ни одного математика». «Романус заблуждается», — воскликнул Генрих IV и, обратившись к слуге, приказал послать за господином де ла Биготьером. Господин де ла Биготьер был не кто иной, как Франсуа Виет (1540—1603), первый великий французский математик — создатель современной алгебры. Это он впервые выдвинул гениальную идею применить буквы для обозначения неизвестных величин. Он систематически пользовался символическими обозначениями действий, которые начали применяться еще в древности для облегчения решений отдельных числовых уравнений, и предвидел, что эта идея получит широкое развитие. Благодаря Виету в конце XVI века, в котором процветала итальянская школа алгебраистов, Франция заняла свое место в создании современной математики.

Добавлю, что Виет был достаточно тесно связан с одним из первых югославских математиков Марином Геталдичем (1566—1626), который родился в Дубровнике и в 1600 г. занимался изданием последних книг Виета.

XVII век открыл для Франции эру особенной славы. В истории математики и физики наиболее выпукло выделяются три имени — Декарта, Паскаля и Ферма. Рене Декарт (1596—1650), философ, математик и физик, часто рассматривается как основоположник новой эры в истории человеческого разума. Попытки Декарта-физика объяснения мира были быстро отвергнуты, между тем его идея объяснить все физические явления протяжением и движением не потеряла интереса и для нас, в связи с тем, что создатель общей теории относительности — сторонник того же принципа, который объясняет физику с помощью геометрии; но прогресс математики позволил Эйнштейну дать этому принципу более удовлетворительную реализацию, чем та, которая представлялась Декарту.

В математике роль Декарта не может быть недооценена. Открытие Декартом аналитической геометрии (в 1637 г.) можно оспаривать. Верно, что греческие геометры пользовались в своих рассуждениях числами и вычислениями, но у греков эти числа не потеряли полностью свой геометрический характер, который постоянно присутствовал в эллинистической науке и следы которого еще остались в современной речи, когда в словах «квадрат» и «куб» мы слышим скорее название геометрических фигур, чем чисел. Именно Декарт впервые выдвинул идею систематически пользоваться абстрактными числами для представления геометрических фигур и, таким образом, сводить геометрические рассуждения к вычисле-

ниям. Тем самым он создал инструмент несравненной силы. Именно ему обязана всем своим развитием геометрия, сначала аналитическая, а затем дифференциальная; к этой последней относится предложенный Декартом общий метод нахождения касательных к кривым, прежде всего алгебраическим. Благодаря аналитической геометрии математики постепенно пришли к пониманию пространств любого числа измерений и научились геометрически рассуждать в этих пространствах.

Можно также сказать, что благодаря аналитической геометрии математики чувствуют себя свободно в воображаемых пространствах. Так, например, недавно физики для объяснения физических явлений использовали трехмерное сферическое пространство. Это, несомненно, далекие следствия гениального открытия Декарта.

Декарту также принадлежит в алгебре правило знаков, а в чистой геометрии — теорема, переоткрытая позже Эйлером и носящая его имя. Эта теорема устанавливает связь между числами вершин, граней и ребер выпуклого многогранника; фактически это одна из первых теорем топологии — науки, которая тогда еще не родилась.

Наконец, в механике Декарт в своем принципе сохранения количества движения проявил интуицию, и потребовались только некоторые уточнения, чтобы сформулировать один из основных принципов механики.

Блез Паскаль (1623—1662), исключительный гений и глубокий философ, обнаружил удивительно раннее развитие в геометрии, и в возрасте 16 лет написал «Трактат о конических сечениях», т. е. о кривых, изучавшихся древними как плоские сечения круглого конуса и играющих важную роль в теории движения планет Кеплера.

Паскаль использовал труды своего современника Дезарга, одного из наиболее крупных французских геометров, который, наряду с самим Паскалем, был одним из предвестников проективной геометрии. Отправляясь, как и Дезарг, от перспективы, Паскаль смог установить поистине чудесное свойство этих кривых, которое сам Паскаль называл «мистической гексаграммой», состоящее в том, что если в коническое сечение вписан шестиугольник, то точки пересечения трех пар его противоположных сторон лежат на одной прямой. Эта первая работа Паскаля показала, что он является великим геометром.

После того как Паскаль создал этот геометрический труд, он стал основоположником теории вероятностей. Его друг шевалье де Мере поставил перед ним два вопроса, относящиеся к азартным играм. Паскаль ответил на них исключительно просто, сводя постепенно все возможные случаи к самому простому. Со своей стороны Ферма дал решение, основанное на совсем другом принципе. В переписке этих двух гениев мож-

но проследить происхождение принципов теории вероятностей. Паскаль понимал огромное значение новых исследований. «Соединяя, — говорил он, — строгость математических доказательств с ненадежностью случайности, новая наука может по праву получить поразительное название геометрии случайностей».

Из знаменитых аргументов этого спора известно, насколько размышления Паскаля о «геометрии случайностей» повлияли на развитие теории вероятностей.

Известна также исключительно важная роль, которую эта теория сыграла в эволюции современной науки: целые части физики являются не более чем главами теории вероятностей, и многие физические законы следует рассматривать только как законы науки о случайном.

Пьер Ферма (1601—1665), о котором мы уже говорили раньше, является одним из величайших математических гениев. Став советником парламента Тулузы в возрасте 30 лет, он оставался им до своей смерти. Его должность, казалось бы, не особенно способствовала математической славе; но несомненно, что он имел достаточный досуг для того, чтобы предаваться своим любимым занятиям.

Ферма знаменит прежде всего своими исследованиями по арифметике и теории чисел. Ему принадлежит много теорем, для которых он записывал только формулировки без доказательств на полях экземпляра труда греческого математика Диофанта о неопределенных уравнениях, незадолго до того (в 1612 г.) изданного Баше де Мезириаком, автором «Приятных и занимательных задач». Несомненно, что Ферма мог или верил, что может доказать эти теоремы. Самая знаменитая из них, известная под названием «последняя теорема Ферма», — теорема о том, что сумма двух n-х степеней (показатель n больше 2) не может сама быть n-й степенью. Эта теорема вызвала бесчисленное количество статей. Никто со времени Ферма не смог достоверно доказать ни ее правильности, ни ложности.*) Эта теорема послужила стимулом для создания более абстрактных теорий современной алгебры, о которых Ферма, возможно, и не помышлял. Давно известно, что теорема может быть неверна только для некоторых исключительных значений показателя, но неизвестно, является ли число этих исключительных значений конечным или бесконечным. Одними только исследованиями, вызванными этой теоремой, и математическими теориями, которые были созданы или усовершенствованы благодаря этой теореме, Ферма оказал значительное влияние на развитие теории чисел. Современники Ферма признавали его бесспорное первенство в этой об-

*) В настоящее время эта теорема доказана. — *Прим. ред.*

ласти. Паскаль в одном из своих писем сообщал, что числовые открытия Ферма далеко превосходят все остальные и что он способен только восхищаться ими.

Но Ферма не ограничивался теорией чисел. Первая половина XVII века является периодом, когда интегральное и дифференциальное исчисления повсеместно получили толчок для своего развития. Достаточно упомянуть в связи с интегральным исчислением (вычислением площадей и объемов и определением центров тяжести) имена Кавальери и Роберваля. Ферма очень далеко продвинул свои исследования в этой области, и именно ему приписывают приемы интегрирования, ставшие классическими. Паскаль, в то время, когда он занимался задачей о циклоиде, однажды ночью, чтобы отвлечься от отчаянной зубной боли, занялся этой задачей и пришел к интегрированию степеней тригонометрических функций.

Ферма и Паскаль внесли вклад и в дифференциальное исчисление (задаче о касательных). Ферма своим методом «максимумов и минимумов» предвосхитил понятие бесконечно малых. Действительно, Лагранж и Лаплас признавали в Ферма первого основателя исчисления бесконечно малых, а Эмиль Пикар мог сказать, что сочинение Паскаля о циклоиде является первым трактатом об интегральном исчислении. Те же формулы исчисления бесконечно малых у Лейбница впервые появились в его замечаниях по поводу одной рукописи Паскаля, которая, по собственному выражению Лейбница, «внезапно озарила» его.

Было бы несправедливо покинуть этих великих гениев, не упомянув, что в течение своей столь короткой жизни Паскаль нашел время уже в 20 лет построить первую арифметическую машину, способную выполнять сложения и вычитания.

Паскаль в трактате «О равновесии жидкостей» был создателем, после Архимеда, гидростатики, и нельзя без волнения видеть в маленькой часовне, построенной во дворе церкви Порт-Рояль, рядом с посмертной маской Паскаля бочку, которая служила ему для проверки того, что мы называем «принципом Паскаля».

Наконец, известны опыты Паскаля в горах Пюи-де-Дом по измерению атмосферного давления, возможно, подсказанные аббатом Мерсенном, вдохновителем небольшой группы философов, математиков и физиков, которые перед созданием Академии наук в 1666 г. образовали очень деятельный кружок. Это было счастливое время, когда один и тот же человек мог быть одновременно выдающимся философом, математиком и физиком и когда такой философ, как Мальбранш, гениально предвидел, что цвета определяются большей или меньшей частотой волн света.

* * *

Во второй половине XVII века и в начале XVIII века доминировали три великих ученых: голландец Христиан Гюйгенс (1629—1693), англичанин Исаак Ньютон (1642—1726) и немец Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Достаточно упомянуть, что двум последним мы обязаны изобретением или, если угодно, систематизацией исчисления бесконечно малых и что первый из них знаменит своими трудами по дифференциальной геометрии, теоретической и прикладной механике и прежде всего своим «Трактатом о свете», где впервые была развита волновая теория света, противоположная теории Ньютона, основанной на испускании частиц.

Великая научная революция, которая произошла в этот период, бесспорно, состояла в доказательстве Ньютона, что законы, управляющие движением небесных тел, — те же самые, что и законы движения тел на поверхности Земли. Один и тот же закон всеобщего притяжения объясняет движения планет и комет и вес на Земле, морские приливы и отливы и т. д. Гением Ньютона была создана совершенно новая наука — небесная механика. Но если принципы и начала этой теории родились в Англии, то Франция стала страной, где эта теория получила наиболее благоприятные условия для ее дальнейшего развития. Для того чтобы убедить вас в этом, мне будет достаточно упомянуть имена ученых, которые внесли наибольший вклад в развитие этой теории: Клеро, Даламбер, Лагранж, Лаплас, Гаусс, Коши, Пуассон, Леверье, Тиссеран и, наконец и прежде всего, Анри Пуанкаре.

Я немного остановлюсь на первом из них — Клеро.

Алексис Клод Клеро (1713—1765), второй в семье из 21 ребенка, отцом которых был профессор математики, получил раннее развитие, сравнимое с развитием Паскаля. Однако, в отличие от Паскаля, первые исследования Клеро не могли предвещать важность его последующих работ. В возрасте двенадцати с половиной лет он послал в Академию наук свою первую работу, в 16 лет — мемуар о кривых двоякой кривизны, а в 18 лет он был назначен приказом короля, вопреки правилам, адъюнктом Академии наук. Я пропускаю его широко известные исследования по чистой математике, в частности, относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений, и перехожу к трудам Клеро, которые сделали его имя знаменитым.

Ньютон и Гюйгенс, исходя из теоретических соображений, предвидели сплющивание Земли у полюсов и даже вычисляли его. Но измерения дуги меридиана от Парижа до Пиренеев, проведенные Кассини в 1701 г.,

заставили усомниться в этом. В результате ряда оживленных, но бесплодных дискуссий по этому вопросу Академия наук решила послать в 1736 г. в Лапландию экспедицию под руководством Мопертюи, чтобы измерить там дугу меридиана. Клеро участвовал в этой экспедиции, работа которой была сильно затруднена снегом и полярной ночью. Измерения дали для градуса дуги меридиана длину, определенно превышающую ту, которую Кассини нашел во Франции. Тем самым сплющивание Земли у полюсов стало очевидным и неоспоримым. Вся слава успеха экспедиции досталась Мопертюи. Его изображали с головой, украшенной медвежьей шапкой, и с рукой, сплющивающей земной шар. Но Клеро не переставал размышлять над причинами этого сплющивания и искал теоретическое обоснование геометрической формы жидкой планеты под действием ньютоновских притяжений. Результаты его размышлений и вычислений были изложены им в книге «Теория фигуры Земли» (1743 г.), которую Даламбер называл «классическим шедевром, превосходящим все, что было сделано до сих пор по этому вопросу, отмечающим важную дату в истории небесной механики».

Клеро также был предвестником сложной теории Луны, основанной Ньютоном. Клеро изложил свои результаты в книге «Теория Луны» (1732 г.), за книгой спустя два года последовали числовые таблицы, показывающие, как сказал Фонтен, «каждый шаг Луны на небе».

Несколько лет спустя Клеро стал очень знаменитым благодаря предсказанию даты ожидаемого возвращения кометы Галлея. Он вычислил, что эта комета вернется на 100 дней позже из-за влияния Сатурна и на 518 дней позже из-за влияния Юпитера и что она прошла бы через перигелий 13 апреля 1759 г., но многочисленные величины, которыми Клеро должен был пренебречь в своих вычислениях, могли бы изменить эту дату на один месяц. Действительно, возвращение кометы имело место 13 марта. Аналогичный случай произошел через 100 лет с французским астрономом Леверье, когда он сообщил, в каком месте неба находится неизвестная планета, которая возмущала движение Урана.

* * *

В последней половине XVIII столетия доминировали великие имена Эйлера и Лагранжа, к которым можно добавить имя Даламбера, однако его нельзя сравнить с двумя первыми.

Леонард Эйлер (1707—1783), «старейшина математиков», родился в Базеле, но большую часть жизни провел в Санкт-Петербурге и Берлине. Его гений блистал во всех ветвях математики и его труды оказывали значительное и продолжительное влияние. Я всегда буду вспоминать то

восхищение, в которое я пришел при чтении его «Введения в анализ бесконечно малых», полученного мной в награду после окончания класса специальной математики. Передо мной открылся совершенно новый мир, подготовивший меня к наилучшему пониманию лекций в Сорбонне и Нормальной школе.

Жан Лерон Даламбер (1717—1783) оставил свой след в различных областях математики. В алгебре его имя носит знаменитая теорема о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет столько же вещественных или мнимых корней, сколько единиц в его степени. Доказательство Даламбера не было строгим. Доказательство, данное этой теореме Эйлером, основанное на совершенно другом принципе, также не безупречно. Строгое доказательство нашел только знаменитый математик Гаусс, и только Коши сделал очевидной очень простую истинную причину справедливости этой теоремы.

Из достижений в анализе я упомяну только, что Даламбер первый правильно составил уравнение в частных производных колебания струны.

Наконец, в механике принцип Даламбера позволяет сводить задачи динамики к статике, этот принцип подготовил путь для создания аналитической механики Лагранжа.

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) родился в Турине, но во французской семье; как и Эйлер, провел несколько лет в Берлине и обосновался в Париже лишь в 1787 г., так что Франция может считать с полным правом Лагранжа своим знаменитым ученым. Это был один из самых великих математиков всех времен.

В теории чисел он доказал последнюю теорему Ферма для показателя 4. В алгебре он, предвосхищая Абеля, Гаусса и Галуа, развивал единообразный метод, который сводит решение алгебраического уравнения к составлению и решению уравнения меньшей степени. Он показал, что уравнения третьей и четвертой степени могут быть решены этим путем, а уравнения пятой степени этим путем решить нельзя.

В анализе Лагранж предложил метод интегрирования уравнений в частных производных первого порядка и ввел понятие особого решения. В своей теории функций Лагранж пытался подвести строгую базу под исчисление бесконечно малых, принципы которого еще не достигли желаемой строгости, хотя никто не сомневался в правильности результатов, полученных с помощью этого исчисления. Лагранжу не удалось полностью решить эту задачу; тем не менее, этот труд, в котором впервые функция рассматривалась абстрактно, независимо от ее геометрического или механического смысла, оказал значительное влияние и подготовил путь для создания современной теории функций.

Способность Лагранжа к обобщениям особенно выявилась в его работах по вариационному исчислению. Это исчисление возникло в XVIII веке в трудах швейцарцев Бернулли и Эйлера. Его первые задачи относились к геометрии и механике. В самой простой из этих задач требовалось найти на поверхности кратчайшую линию между двумя данными точками. В этой задаче искомым неизвестным являлось не число, а более сложный объект — линия, состоящая из бесконечно многих точек. Это исчисление было особенно важным для механики, из-за принципа наименьшего действия Мопертюи, сводившего определение траектории точки в данном силовом поле к задаче на максимум и минимум. Не забудем также, что Ферма сводил законы оптики к аналогичному принципу, в силу которого световой луч, идущий от одной точки к другой, следует по такому пути, который требует для своего прохождения наименьшее время. В теории, в которой почти каждая задача решалась специальным образом, Лагранж ввел общий метод, не зависящий от природы задачи, пользуясь бесконечно малыми вариациями неизвестных и применяя вариационное исчисление.

Я пропущу работы Лагранжа по небесной механике, для того чтобы перейти к его фундаментальному труду — созданию аналитической механики (1788 г.). Все великие принципы современной механики были постепенно завоеваны благодаря Галилею, Декарту, Гюйгенсу, Лейбницу, Ньютону и Даламберу. Но необходимость принимать в расчет силы неизвестных связей при определении движения системы, находящейся под действием данных сил, часто делала это определение очень трудным. Лагранж одним гениальным ударом, введя понятие виртуальной работы, полностью устранил это препятствие, по крайней мере в случае отсутствия трения, и предложил совершенно общий метод для почти автоматического составления уравнений, определяющих искомое движение; для этого достаточно уметь вычислять выражение живой силы системы и выражение элементарной работы, производимой данными силами для виртуального бесконечно малого смещения системы. Помимо практической важности это чудесное творение Лагранжа имеет и значительное философское значение, так как оно освещает полным светом все, что существенно с точки зрения механических свойств в произвольной материальной системе. Гений Лагранжа здесь равен гению Декарта — создателя аналитической геометрии.

«Уравнения Лагранжа» аналитической механики предоставляют аналитические модели для различных механических разъяснений некоторых физических теорий. С этой точки зрения эти уравнения имеют важное философское значение. У многих ученых XIX века была иллюзия, что

все можно объяснить с помощью аналитической механики; подобная иллюзия была у Декарта, который считал, что все можно объяснить с помощью аналитической геометрии. В настоящее время эти иллюзии уже не разделяются учеными. Тем не менее математика действительно обладает способностью снабжать физиков аналитическими формами для их теории, и мы знаем многочисленные примеры этого. Некоторые превосходные умы видели опасность в таких чудесных синтетических построениях, как предложенные Лагранжем, которые позволяют охватить одним взглядом огромный ряд явлений, так как в этом случае имеется риск потерять контакт с конкретной действительностью. Таким был великий геометр Понселе, знаменитый своими работами по механике, который избегал применения метода Лагранжа и предпочитал в каждой задаче механики подробно следовать действиям различных сил, чтобы шаг за шагом придти к окончательному действию этих сил. Тот же Понселе по аналогичной причине избегал применения аналитической геометрии и предпочитал прямое исследование геометрических фигур; он рассматривал соотношения между различными частями одних фигур и частями других фигур, применяя принципы геометрии древних. Отсюда видно, что имеются два вида ученых, — и те и другие необходимы для прогресса науки.

Среди французских математиков имеются ученые обоих видов.

* * *

Лидерство французских ученых в математике, очевидное в конце XVIII века (Эйлер умер в 1783 г.), стало особенно ясным во время Французской революции и в начале XIX века. Среди великих имен этого периода следует указать Монжа, Лапласа и Лежандра.

Пьер Симон Лаплас (1749—1827) повсеместно известен своими работами по небесной механике, которую он сделал общедоступной в своем замечательном «Изложении системы Мира». Эта чудесная книга подробно разъясняет почти все небесные явления. В ней была сформулирована классическая концепция научного детерминизма, согласно которой знание положений различных материальных точек, составляющих Вселенную, и их скоростей в один данный момент достаточно для того, чтобы определить их положения и скорости в любой момент их существования, во всяком случае при условии знания закона сил взаимодействия этих точек с другими точками, если эти силы определяются ньютоновой моделью сил притяжения. Именно по этой концепции математическая физика развивалась в течение долгого времени, и только недавно в ней была пробита брешь благодаря развитию теории электромагнетизма и атомной физики. Однако эта концепция имела огромное влияние на развитие науки.

Другим значительным трудом Лапласа является «Аналитическая теория вероятностей» (1812 г.), одной из важных частей которой было применение понятия вероятности к методу наименьших квадратов, определенному еще Лежандром.

В исследованиях о притяжении эллипсоидов Лаплас ввел сферические функции, с помощью которых можно представить любую функцию точки на сфере. Здесь же находится знаменитое уравнение Лапласа, которому удовлетворяет ньютонов потенциал, определенный Лагранжем. Это уравнение встречается во многих задачах анализа, геометрии, механики и физики.

С Андриеном Мари Лежандром (1752—1833) мы связываем возрождение теории чисел, которую с большим успехом развивал Эйлер. В арифметике Лежандру мы обязаны законом взаимности, носящим его имя, хотя впервые этот закон был сформулирован Эйлером несколькими годами раньше. Лежандр впервые дал точную формулировку этого закона и доказал его для некоторых случаев. Гаусс несколько позже открыл его в третий раз и дал много строгих и полных доказательств этого закона.

Великое сочинение Лежандра, которое потребовало от него многих лет труда — большой двухтомный трактат «Об эллиптических интегралах», опубликованный в 1825 и 1826 гг. В нем дано полное исследование этих интегралов, содержащих квадратный корень из многочлена четвертой степени. Лежандр указал различные замечательные формы, которые можно придать этим интегралам. Тем самым Лежандр подготовил прекрасную теорию эллиптических функций и поделил славу ее создания с Якоби и Абелем.

Отметим, наконец, его «Начала геометрии» (1794 г.), которые переиздавались много раз и в англосаксонских странах заменили в преподавании «Начала» Евклида. Эта книга Лежандра сыграла важную роль в истории неевклидовой геометрии.

Гаспар Монж (1746—1818) считается одним из самых великих французских геометров. Для этого имеется двойное основание. Прежде всего, он создатель современной начертательной геометрии. Эта наука имеет долгую историю: она выросла из теории перспективы, принципы которой были известны еще итальянским художникам эпохи Возрождения и с помощью которой Дезарг и Паскаль внесли важный вклад в теорию конических сечений, а несколько позже, следуя за ними, французский геометр Делаир обобщил на конические сечения теорию полюсов и поляр относительно круга.

Монж систематизировал начертательную геометрию и впервые производил построения на поверхностях, отличных от плоскости. Далее, кни-

гой «Приложения анализа к геометрии» Монж дал значительный импульс развитию дифференциальной геометрии, рано выделившейся из аналитической геометрии Декарта. Эта ветвь геометрии занимается свойствами поверхностей, углубленное изучение которых было начато Эйлером и Менье. Монж выдвинул идею рассмотрения больших семейств поверхностей в виде множеств решений одного и того же уравнения в частных производных. Он интегрировал уравнение, определяющее минимальные поверхности, реализуемые конкретным образом в опытах Плато, и которые позднее, вплоть до наших дней, стали объектом важных исследований.

Теории Монжа были объектом его преподавания в Нормальной школе, основанной Конвентом в 1795 г. наряду с Политехнической школой, где преподавали также Лагранж и Лаплас.

Монж умел объединять вокруг себя большой круг учеников, из которых ограничусь упоминанием Дюпена, известного своей книгой «Развитие геометрии», где он ввел понятие сопряженных касательных и индикатрису в точке поверхности. Дюпена можно рассматривать как одного из предвестников аффинной геометрии.

* * *

Первая половина XIX века во Франции отмечена именами Фурье, Коши, Понселе и Галуа. Все эти гении открывали новые пути в науке.

Жана Батиста Жозефа Фурье (1768—1830) можно рассматривать как создателя математической физики. Я пропущу его работы по алгебре, которыми не следовало бы пренебрегать, для того чтобы сразу перейти к его «Математической теории теплоты», появившейся в 1822 г., но задуманной им не позже 1807 г. Этим трудом Фурье открыл новую область математического анализа. «Аналитические уравнения, неизвестные древним геометрам, — писал Фурье, — и введенные впервые Декартом для изучения кривых и поверхностей, приложимы не только к свойствам фигур и к объектам теоретической механики, но могут быть применены ко всем общим явлениям... Анализ, рассматриваемый с этой точки зрения, распространяется на саму природу, он определяет все возможные отношения и меры времени, пространства и температуры... В изучении всех явлений он следует тем же путем, он выражается тем же языком, что и язык единства и простоты плана Вселенной, и еще более раскрывает неизменный порядок, управляющий всеми делами природы». Не забудем, наконец, что для Фурье углубленное изучение законов, управляющих природой, является наиболее плодотворным источником математических открытий; в частности, математическая теория теплоты сыграла важную роль в развитии чистой математики.

Теория тригонометрических рядов, основанная Фурье для интегрирования уравнений в частных производных, которые он встречал, породила бесчисленное множество работ, предназначенных для строгого обоснования, дополнения и развития этой теории.

Одна из главных проблем, которую следовало решить, состояла в определении того, какие функции допускают представление в виде ряда Фурье. Примеры, данные самим Фурье, показались очень странными и должны были породить в умах математиков удивление, аналогичное тому, что испытал бы музыкант, когда из соединения чистых звуков в конечном или бесконечном числе получался бы какой-то набор бессмысленных шумов. Все эти странные результаты заставили математиков пересмотреть и уточнить применяемое ими довольно туманное понятие функции и размышлять об основаниях их науки. Это породило неслыханное следствие, не закончившееся до сих пор, — теорию множеств, к которой привели эти просчеты математиков и в которой парадоксы разрешаются с трудом и, боюсь, без полного успеха.

То же происхождение, что и теория множеств, имеет теория функций одного вещественного переменного, созданная французскими математиками в конце XIX и в начале XX веков.

Огюстен Луи Коши (1789—1857) был чрезвычайно плодовитым гением, успешно работавшим во всех ветвях математики — теории чисел, геометрии, анализе, небесной механике. Он положил начало эре строгости в математике, не соглашаясь, как это делал Эйлер, пользоваться рядами, не будучи уверенным в их сходимости. Коши принадлежит общее правило, позже открытое снова Адамаром, которое позволяет определить, при каких значениях переменного сходятся степенные ряды, подробно изучавшиеся в XVIII веке.

Великим творением Коши является теория функций комплексного или мнимого переменного. Мнимые величины в течение более трех веков были скандалом математики. Итальянские алгебраисты XVI века встретились с ними в формуле для корней уравнения третьей степени в том парадоксальном случае, когда все корни вещественные. Мнимые величины оказались необходимыми и очень удобными и с их помощью очень легко удалось получить важные результаты в области вещественных величин, что без них не удавалось. Тайна была разъяснена в конце XVIII века швейцарским математиком Арганом — он предложил конкретную интерпретацию мнимых величин, которые, подобно векторам на плоскости, обладают не только длиной, но и направлением.

Коши представлял точки плоскости не только двумя вещественными координатами, но и одной мнимой (или, лучше сказать, комплексной)

координатой. Поэтому функцию комплексного переменного можно рассматривать как закон, ставящий в соответствие одной точке плоскости другую точку этой плоскости при дополнительном очень важном условии, обеспечивающем существование производной этой функции. Тем самым Коши создал новый мир функций. Элементы этого мира исключительно организованы: так же, как Кювье мог восстановить допотопное существо по фрагменту его скелета, математик вполне уверенно может восстановить функцию Коши, зная ее значение во всех точках сколь угодно малой дуги кривой. В этом новом мире господствуют чудесные порядок и гармония и, как в теории чисел, ничто не дает впечатление большей красоты, чем длинная цепь теорем, определяющих свойства этих функций, и многочисленные применения этих теорем.

Величие труда Коши измеряется длинным рядом работ, посвященных функциям мнимого переменного, и тем, что Коши дал возможность открыть много вещей, о которых, быть может, сам не подозревал. Одна очень красивая по своей простоте теорема оказалась достаточной для того, чтобы сделать почти бессмертным имя Лиувилля. Другая знаменитая теорема, носящая имя, быть может, самого великого из ныне живущих математиков Эмиля Пикара, получена им еще совсем молодым, в то время, когда перед ним открылись неожиданные широкие горизонты, до сих пор порождающие новые исследования.

Великий немецкий математик Вейерштрасс развил теорию функций комплексного переменного, исходя из другой отправной точки. Долгое время считалось, что это изменение точки зрения не должно отразиться на теории, но Эмиль Борель — и это одно из самых красивых его открытий — показал, что точка зрения Коши дает возможность более глубоко вникнуть в суть дела. Борелю действительно удалось отнять от плоскости достаточные участки, чтобы никакой круг, каким бы малым он ни был, не остался бы незатронутым, и он смог на оставшейся части плоскости определить функцию, удовлетворяющую условиям Коши, но не удовлетворяющим определению Вейерштрасса, в силу которого функция комплексного переменного может существовать только на незатронутых участках площади. Помимо этого Эмиль Борель внес мощный вклад в развитие теории функций комплексного переменного изданием серии монографий по теории функций, в которой участвовали и участвуют сейчас ученые всех стран.

С Жаном Виктором Понселе (1788—1867) мы входим в область чистой геометрии. Понселе считается создателем проективной геометрии, объектом которой являются свойства фигур, сохраняющиеся при проектированиях. Ему мы обязаны новым и чрезвычайно плодотворным понятием полярного преобразования, которое позволяет из одной плоской

фигуры получать другую плоскую фигуру, обладающую особым свойством — тем, что точкам первой фигуры соответствуют прямые линии второй фигуры, а точкам второй фигуры — прямые линии первой. Это преобразование часто позволяет сводить доказательства некоторых свойств одной фигуры к более простому доказательству свойств другой фигуры. Немного позднее Жергонн вывел отсюда принцип двойственности, играющий фундаментальную роль в проективной геометрии.

Наконец, Понселе мы обязаны очень важным принципом непрерывности: если некоторое свойство доказано для одной фигуры, оно не перестает быть верным при деформации этой фигуры, сохраняющей предполагаемые соотношения между различными элементами фигур. Этот принцип в формулировке Понселе оспаривался Коши, который смог легко привести примеры невыполнения этого принципа. Однако этому принципу можно придать совершенно строгую формулировку, которой не дал Понселе; этот принцип часто используется и бывает весьма полезен.

Влияние Понселе в геометрии было весьма значительным. Работы немецких геометров Штейнера и Штаудта обязаны своим появлением Понселе. Сильное влияние Понселе испытал и Шаль, первый заведующий кафедрой высшей геометрии Сорбонны, который был одним из самых блестящих представителей современной чистой геометрии. Шалю мы обязаны замечательным памятником истории — «Историческим обозрением развития геометрии», в котором было исправлено некоторое число ложных мнений.

Прежде чем расстаться с Понселе, я добавлю, что он играл важную роль в развитии прикладной механики, которую долгое время преподавал в Меце, а затем в Сорбонне.

Эварист Галуа (1811—1832) — одна из самых необычных фигур в истории науки. Получив два раза отказ на приемных экзаменах в Политехническую школу, он был принят в 1831 г. в Нормальную школу. Активное участие в политике привело его к нескольким месяцам тюрьмы и исключению из Школы. Он был убит на дуэли по ничтожному поводу в возрасте двадцати с половиной лет. Галуа изложил свои математические открытия по теории уравнений в двух мемуарах, посланных в Академию наук, но не понятых и утерянных, и в нескольких маленьких статьях, опубликованных в 1830 г. в «Бюллетене Ферюссака», и подробно описал их в письме к своему другу Шевалье накануне дуэли. Фрагменты из других статей, найденные в бумагах Галуа, были опубликованы Лиувиллем в 1846 г. в его журнале.

Значение труда Галуа можно кратко охарактеризовать следующим образом. Итальянские алгебраисты XVI века Тарталья, Кардано и Феррари

решили уравнения третьей и четвертой степени с помощью извлечения квадратных и кубических корней, но все дальнейшие настойчивые попытки решить уравнения высших степеней оказались тщетными. Лагранж, Абель и Гаусс внесли важный вклад в этот вопрос, указав некоторые классы уравнений, разрешимых в радикалах. Абель первым доказал в 1826 г. невозможность решить в радикалах общее уравнение пятой степени. Стал очевидным тот факт, что задача, которой настойчиво занимались, начиная с XVI века, многие математики, была поставлена некорректно. Галуа принадлежит слава человека, который внес полную ясность в этот вопрос: он показал, что с каждым данным уравнением связано некоторое число перестановок его корней, образующих то, что называется группой. Это те перестановки корней, при которых не изменяются рациональные соотношения, имеющие место между ними (смысл выражения «рациональные соотношения» может быть уточнен). От природы этой группы зависят существенные свойства этого уравнения — возможность или невозможность решить уравнение в радикалах и, в общем случае, природа вспомогательных уравнений, предварительное решение которых влечет за собой решение данного уравнения. Такая точка зрения позволила Галуа с легкостью вывести результаты, полученные его предшественниками. Теория групп подстановок, т. е. перестановок некоторого числа объектов, основанная Коши, оказалась чрезвычайно важной благодаря работам Галуа. Он усовершенствовал эту теорию в важных пунктах и показал фундаментальную роль простых групп.

Галуа обогатил также теорию чисел, определив новые классы мнимых чисел — «мнимости Галуа», каждый из которых связан с некоторой степенью простого числа.

Имя Галуа часто встречается не только в упомянутой теории уравнений, но и в других теориях современной алгебры. Письмо к его другу Шевалье показывает нам, что он сделал открытия в анализе не менее важные, чем в алгебре, опередив на 25 лет работу великого немецкого математика Римана об абелевых интегралах.

Горько думать о том, что потеряла наука со столь ранней смертью Галуа, и, как говорит Эмиль Пикар, «наше восхищение его жизнью, короткой и трагической, тем более велико, что он смог оставить такой глубокий след в науке».

Теория Галуа позволила разъяснить парадоксальное введение мнимостей в формулу для решения уравнения третьей степени, все корни которого вещественны, так как теперь стало возможно доказать, что решение уравнения, все корни которого вещественны и которое разрешимо в вещественных радикалах, может содержать только квадратные радикалы.

Эта теория позволяет также доказать невозможность решения с помощью циркуля и линейки таких завещанных древними задач, как задачи удвоения куба и трисекции угла.

Мы обязаны великому французскому математику Камиллу Жордану (1838—1922) значительным трудом — «Трактатом о подстановках», являющимся подлинным памятником, воздвигнутым во славу Галуа.

Простота и глубина основной идеи Галуа таковы, что они могли быть приложены к другим областям, помимо алгебраических уравнений. Эмиль Пикар и Эрне Вессио показали, что эта идея применима также к интегрированию линейных дифференциальных уравнений. Я упомяну также исследования Драша и Вессио, распространивших теорию Галуа на интегрирование более общих дифференциальных уравнений, но здесь возникли трудности, из-за которых пришлось исказить теорию, или, по крайней мере, немного пожертвовать ее прекрасной простотой.

Эволюция науки после Галуа обнаружила возрастающую важность понятия группы в самых разных ветвях математики и физики. Норвежский математик Софус Ли (1842—1896), создатель теории непрерывных групп преобразований, пронизал ими анализ и геометрию. Большой поклонник Галуа, Ли посвятил свой большой трактат о группах преобразований Высшей Нормальной школе (1889 г.).

Именно во Франции были написаны наиболее важные труды, развивающие эту теорию, совершенствующие и расширяющие ее и находящие ей все новые приложения. Пуанкаре утверждал, что понятие группы заранее имеется в уме геометра, так как аксиома о том, что если две фигуры равны третьей, то они равны между собой, равносильна признанию существования группы, управляющей геометрией, а именно множества операций, преобразующих фигуры в равные им. Замечательно, что теория групп способна указать нам все конкретные разновидности, связанные с понятием «равенства фигур», в том смысле, которым пользовался в 1872 г. великий немецкий геометр Феликс Клейн. В этом смысле имеется бесконечно много возможных геометрий, каждая из которых управляется отдельной группой и может изучаться сама по себе, без обращения к элементарной геометрии. В эту схему входит и проективная геометрия, в которой две фигуры рассматриваются как равные, если от одной из них можно перейти к другой с помощью последовательности проектирований.

* * *

Минуло столетие со времени исследований Галуа. В течение этих ста лет математика претерпела значительное развитие. Было написано бесчисленное количество статей, многие из которых, впрочем, бесполезно

загромождают наши библиотеки. Едва намеченные новые теории были полностью созданы и иногда даже распространились в другие области математики. Одним словом, в этой науке, как и в других, имелось этакое «брожение», и не всякому математику теперь легко охватить все развитие нашей науки.

Умы, способные делать важные открытия одновременно в чистой и прикладной математике, становятся все более редкими. Исключительно трудно встретить такого гения, как француз Андре Мари Ампер (1775—1836), который был одновременно крупным физиком, создателем электродинамики, и великим математиком — он разделяет с Монжем славу основания теории уравнений в частных производных второго порядка. Такими же были француз Габриэль Ламе (1795—1870), который одновременно занимался анализом, геометрией и являлся одним из создателей теории упругости, и француз Симеон Пуассон (1781—1840), знаменитый своими трудами по анализу и математической физике. Можно рассматривать как математика и знаменитого Огюстена Френеля (1788—1827), основателя физической оптики, работы которого ознаменовали решительную победу волновой теории света, по крайней мере до создания квантовой физики.

Вместо того чтобы приводить вам длинный, может быть, утомительный список, я предпочту немного остановиться на нескольких великих французских математиках, которые были моими учителями и которым я счастлив выразить здесь мое почтение и восхищение.

Шарль Эрмит (1822—1901), едва поступив в Политехническую школу, послал знаменитому Якоби, который вместе с Абелем был основателем теории эллиптических функций, работу о подразделении абелевых трансцендентальностей — функций, связанных с интегрированием наиболее общих алгебраических дифференциалов. Якоби, который при аналогичных обстоятельствах встретил теплый прием у Лежандра, выразил юному Эрмиту свое восхищение его результатами. Это положило начало переписке двух великих умов. Именно Якоби Эрмит в возрасте 24 лет прислал свои открытия в высшей арифметике, которые ставили его в ранг наиболее крупных математиков. Продолжая знаменитые работы Гаусса, Эрмит занялся общей алгебраической теорией форм в общем виде и ввел непрерывные переменные в теорию чисел, в которой господствует дискретность. Он впервые рассмотрел неопределенные сопряженные квадратичные формы, называемые в настоящее время эрмитовыми формами. Благодаря этому имя Эрмита является одним из тех, которые встречаются в работах по квантовой физике. Это один из многих примеров того, как абстрактная теория неожиданно применяется к конкретным задачам.

Славу Эрмиту принесло также его открытие в 1873 г. трансцендентности числа e, основания натуральных логарифмов. Существование трансцендентных чисел, т. е. таких чисел, которые не являются ни целыми, ни рациональными, ни корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, было впервые доказано Лиувиллем. Открытие Эрмита получило широкую известность и возбудило надежду, что Эрмит докажет также трансцендентность числа π и тем самым докажет невозможность решения циркулем и линейкой проблемы квадратуры круга. Девять лет спустя немецкий математик Фердинанд Линдеман, вдохновившись методом Эрмита и остроумно обобщив его, заслужил честь этого нового открытия.

Эрмит производил глубокое впечатление на всех, кто слушал его лекции. «Невозможно забыть, — писал известный математик Поль Пенлеве, — почти религиозный стиль его преподавания, озноб от красоты или таинственности, которые овладевали его аудиторией, когда он говорил о каком-нибудь чудесном открытии или о неизвестном. Его слова внезапно открывали широкие горизонты в различных областях науки, они вызывали любовь и уважение к истине».

Со своей стороны я рассматривал лекции Эрмита как откровение и испытывал ясную и чистую радость, которую дает созерцание математического порядка; эту радость можно сравнить с той, которая возникала у Бетховена, когда он слышал в себе свои лучшие произведения.

Гастон Дарбу (1847—1917) был одновременно специалистом по анализу и геометрии. Я оставлю в стороне его исследования по анализу, несмотря на их большое значение, и на то, что в некоторых из них он был предшественником важных открытий. Своей славой Дарбу обязан прежде всего своим трудам по геометрии. Дарбу не относился ни к тем геометрам, которые отказываются от чистой красоты геометрии для того, чтобы заменить ее аналитическими выкладками, ни к тем специалистам по анализу, которые сводят геометрию к последовательности вычислений и которые не интересуются их геометрическим смыслом. В этом смысле он был продолжателем Монжа, соединявшего очень умелое использование анализа с очень тонкой и очень развитой геометрической интуицией. Его методы всегда отличались редким изяществом и совершенным образом сочетались с особенностями рассматриваемых случаев. В своем преподавании на кафедре высшей геометрии Сорбонны, которую он унаследовал у Шаля, Дарбу часто отдавал предпочтение теории тройных ортогональных систем, в которой с удовольствием подчеркивал важность труда Ламе, а также теории изгибания поверхностей, возникшей в «Исследованиях

о кривых поверхностях» Гаусса и являвшейся до Дарбу предметом важных работ французских геометров, среди которых мне будет достаточно упомянуть Оссиана Бонне.

Наконец, Дарбу показал плодотворность своего метода подвижного триэдра, который состоит в использовании вместо фиксированной системы координат, не имеющей никакого отношения к изучаемой фигуре, локальных систем координат, связанных с каждой точкой этой фигуры. Этот метод получил у Эли Картана, благодаря теории групп, широкое развитие и смог быть применен к самым различным пространствам, которые были созданы геометрами после открытия общей теории относительности.

Влияние Дарбу на развитие геометрии было значительным: он имел учеников-энтузиастов во всех странах; ограничусь упоминанием здесь великого румынского геометра Георге Цицейки (1873—1939), одного из основателей «Математического обозрения Балканского Союза», недавнюю утрату которого оплакивает ученый мир.

«Теория поверхностей» Дарбу является главным монументом, воздвигнутым во славу геометрии и анализу. Эту книгу еще в течение долгого времени будут изучать как классический труд.

Рассказывают, что один молодой немецкий математик удивлялся, что Лагранж не считал Гаусса самым великим немецким математиком. Лагранж ответил ему: «Нет! Гаусс — самый великий математик Европы». Можно сказать аналогичным образом об Анри Пуанкаре (1854—1912), что он был не только великим математиком, он был самой математикой. Нет ни одной части математики и даже физики, в которой он не оставил бы свой след, которую бы он не обновил или не превратил в новую науку.

Определив фуксовы функции, Пуанкаре смог выразить с помощью униформных функций одного параметра координаты точки алгебраической кривой, — результат, который до него геометры могли получить только для весьма частного класса этих кривых. Он решил общую задачу униформизации очень смелым методом.

Пуанкаре был предвестником теории функций нескольких комплексных переменных.

Пуанкаре был создателем новой теории, изучающей в целом решения дифференциальных уравнений в вещественной области; благодаря этой теории он смог обновить методы небесной механики и изучать периодические решения и решения, асимптотические к ним, в задачах, поставленных в этой науке, а также исследовать задачи устойчивости для этих решений, в связи с чем он создал понятие инвариантного интеграла.

В топологии, ветви геометрии, занимающейся только теми свойствами тел, которые сохраняются при любых непрерывных деформациях, почти все работы появились только после того, как Пуанкаре написал три или четыре мемуара, посвященных этой науке.

В Сорбонне Пуанкаре преподавал последовательно все ветви математической физики. Пуанкаре оказал значительное влияние на возникновение идей, которые привели к опыту Майкельсона, и был одним из основоположников теории относительности.

Преждевременная смерть Пуанкаре лишила науку светоча, об утрате которого будут часто жалеть.

Весь образованный мир знал его научно-философские книги «Наука и гипотеза» и «Ценность науки», которые были переведены на многие языки. В этих книгах Пуанкаре дал чеканные формулировки наиболее важных проблем, поставленных наукой. Иногда Пуанкаре был близок Паскалю, например, когда он говорил: «Мысль — это только вспышка среди долгой ночи, но это вспышка, которая есть все».

Наука в течение долгого времени будет развивать следствия из идей Пуанкаре, щедро рассыпанных в его творчестве, столь обширном и разнообразном.

К именам великих ученых, о которых я только что говорил, следует добавить имена Поля Аппеля (1855—1930) и Эдуарда Гурса (1858—1936), профессоров чудесной ясности, первый из которых был автором «Трактата о теоретической механике», а второй — «Трактата о дифференциальном и интегральном исчислении», которые в течение долгого времени являются классическими трудами.

Особенно следует добавить имя Эмиля Пикара, единственного ныне живущего из этого славного поколения, окруженного всеобщим восхищением и уважением. Два года назад Пикар, вместе с великим немецким математиком Давидом Гильбертом, одним из первых получил золотую медаль Института Миттаг-Леффлера, а несколько недель назад на торжестве, посвященном пятидесятилетию его избрания в Академию наук, Борель прославлял величественными словами научное творчество Пикара.

Я уже говорил о теореме Пикара и о его трудах, продолжающих теорию Галуа. Труды Пикара об алгебраических функциях двух переменных основали алгебраическую геометрию поверхностей. Эта наука получила значительное развитие в Италии, которая в течение почти столетия является родиной целого поколения великих геометров. Среди них имеются такие, которые изучали алгебраическую геометрию поверхностей с более геометрической точки зрения, чем Эмиль Пикар, но Эмиль Борель

был вправе сказать, что без трудов Пикара алгебраическая геометрия не могла бы получить такое развитие.

* * *

Слава французской математики, блиставшая в период, когда Эрмит, Дарбу, Пуанкаре и Пикар создавали свои великие открытия, не померкла, руки, несшие ее факел, не ослабли. Я должен ограничиться упоминанием нескольких имен.

Габриэль Кенигс (1858—1931) был очень тонким геометром, работы которого по линейчатой геометрии были отмечены таким же изяществом, как работы Дарбу.

Поль Пенлеве (1863—1933), благодаря созданию новых трансцендентностей, смог решить проблему, казавшуюся неприступной самому Пуанкаре, который характеризовал результаты Пенлеве в анализе следующими словами: «Математика представляет собой прочно оборудованный континент, все страны которого тесно связаны одна с другой; творчество Поля Пенлеве представляет собой отдельный сверкающий остров в соседнем океане». Но это мнение не полное, так как Пенлеве способствовал значительному прогрессу механики, которую он продолжительное время преподавал в Политехнической школе.

Именно Пенлеве своими теоретическими исследованиями внес наиболее крупный вклад в развитие авиации, начиная с ее возникновения, и благодаря Пенлеве создание авиации можно рассматривать как почти исключительную заслугу французов.

Жак Адамар, слава которого повсеместна, оставил свой след в теории чисел исследованиями о функции $\zeta(s)$ Римана, связанной с трудной проблемой распределения простых чисел, в геометрии — трудами о геодезических линиях на поверхностях с противоположными кривизнами, в анализе — работами об уравнениях математической физики в частных производных и о принципе Гюйгенса, а также в вариационном исчислении и функциональном анализе — новой науке, которую создал великий итальянский математик Вито Вольтерра и которой Адамар дал сильный импульс развития.

Наконец, своим семинаром в Коллеж де Франс, где все зарубежные математики, посещавшие Париж, делали доклады о своих последних работах, Адамар оказал глубокое влияние на развитие математики, рассматриваемой как дело международного сотрудничества ученых.

Молодость Адамара, продолжающаяся до наших дней, является гарантом его дальнейшего творчества.

Теория функций комплексного переменного всегда разрабатывалась во Франции с большим успехом. Достаточно назвать имена Эмиля Бо-

реля, Пьера Фату, рано умершего прекрасного математика, Поля Монтеля, знаменитого своей теорией нормальных семейств функций, Гастона Жюлиа, хорошо известного своими трудами по итерации рациональных функций, Жоржа Валирона и так далее.

Теория функций вещественного переменного была создана почти исключительно французскими математиками. Подготовленная «Трактатом об анализе» Камилла Жордана, изучавшимся во всех странах, глубокое влияние которого было сравнимо с влиянием «Трактата об анализе» Пикара, эта теория возникла в трудах Эмиля Бореля, создателя теории меры множеств, Анри Лебега, создателя знаменитой теории интегрирования, носящей его имя, Рене Бэра и Арно Данжуа. Эта теория внесла неожиданную гармонию в область, о которой ничего не знали и которую многие математики считали недостойной изучения. Смелость этой теории показала проницательность и глубину видения ее авторов. Мне следовало бы сказать еще о теории абстрактных пространств Мориса Фреше, об инфинитезимальной геометрии Жоржа Булигана и вспомнить труды Эли Картана в анализе и геометрии, о которых, как вы понимаете, я здесь суждения не могу выносить.

Создание Института Анри Пуанкаре вызвало новый подъем исследований по математической физике во Франции. В теории вероятностей в настоящее время вдохновителем является Эмиль Борель, издавший серию книг, которая заслуживает такой же известности, как и изданная им серия книг по теории функций. В первой книге из этой серии были опубликованы прекрасные исследования Фреше, Поля Леви и Жоржа Дармуа. Кафедру теоретической физики занимает Луи де Бройль, молодой создатель волновой механики, который преобразовал атомную физику и примирил волновую теорию света с теорией испускания частиц.

Нельзя не вспомнить также Институт механики, директором которого является Анри Вилла, хорошо известный своими трудами по гидродинамике, руководитель серии «Mémorial des Sciences Mathématiques», вызвавшей подражания во многих странах. В то же время Вилла — главный редактор «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées», который был основан около века назад Лиувиллем и долгое время редактировался великим математиком Камиллом Жорданом. Картина активности французской математики была бы неполной, если бы я не упомянул о значительной роли, которую со времени их основания играли Политехническая и Нормальная школы. Почти все великие французские математики более столетия формировались в одной из этих Школ. Последние полвека славную роль питомника французской математики играет почти исключительно Нормальная школа, что было признано еще 50 лет назад Софусом Ли.

Несколько раз зарубежные страны посылали в эту Школу своих лучших молодых людей, чтобы они получили такое же образование, как их французские товарищи. Следует приложить усилие, чтобы не рассматривать как французских математиков геометра Георге Цицейку, о котором я говорил сегодня, и моего товарища и друга Михайло Петровича, старейшину югославских математиков. Мы были рады узнать от него о большой оригинальности созданного им спектрального метода в арифметике, алгебре и анализе и основанной им общей феноменологии, в которой он систематически занимается проблемой существования аналитических форм, способных воспринимать одновременно законы многих физических теорий, на первый взгляд совершенно различных. Я думаю, что этими трудами математика также обязана Франции.

В настоящее время подрастает молодое поколение, готовое сменить старших; этим мы в значительной степени обязаны Нормальной школе. Может быть, слишком рано упоминать имена, но многие из них уже хорошо известны. Мне будет достаточно упомянуть только одно имя — Жака Эрбрана, творчество которого, грубо оборванное смертью, давало надежду предполагать, что он будет великим математиком, равным, быть может, Эваристу Галуа.

Дамы и господа! Мне пора остановиться, так как я уже слишком злоупотребил вашим благосклонным вниманием. Разрешите мне, однако, сделать еще одно замечание общего характера, которое послужит нам заключением.

Математика, как всякая наука, но, несомненно, более, чем всякая другая, развивается путем последовательных абстрагирований. Забота о строгости побуждает математиков все более и более освобождать изучаемые ими сущности от конкретных свойств, которые не участвуют в их рассуждениях. Этот процесс побуждает к известным причудам, благодаря которым математики становятся учеными, которые сами никогда не знают, о чем они говорят, и даже не заботятся о том, чтобы узнать, существует ли то, о чем они говорят. Это преувеличенное равнодушие к реальности всегда было неприемлемо для французских математиков. В самом деле, они знают, что хотя логика необходима, не она является главной. В математической деятельности, как в любой человеческой деятельности, должна быть шкала ценностей: несомненно следует рассуждать правильно, но прежде всего следует ставить важные проблемы. В этом отношении мы можем утверждать, что великие французские математики не только всегда знали, о чем они говорят, но и всегда обладали необходимой интуицией для того, чтобы выбрать в качестве объекта своих размышлений наиболее фундаментальные проблемы, решение которых окажет наиболее глубокое влияние на развитие науки.

Приложение 3.
Э. Картан. К столетию Софуса Ли

В 1942 г. отмечается столетие со дня рождения знаменитого норвежского математика Софуса Ли.

Образованной публике известны великие писатели, великие драматурги и великие музыканты Норвегии. Менее известен вклад, который этот народ внес в другие области интеллектуальной деятельности.

В науке прославились два очень крупных математика. Первый из них — Нильс Хенрик Абель, родившийся в 1802 г. и умерший в возрасте 27 лет, оставивший труд восхитительной глубины, второй — Софус Ли (1842—1898).

Мариус Софус Ли родился 17 декабря 1842 г. в семье пастора в маленькой деревне Эуль в глубине Эульского фьорда, одного из ответвлений Нордфьорда, который глубоко врезается в сушу в двухстах километрах севернее Бергена и в ста двадцати километрах к югу от Андальснеса, название которого часто произносилось в трагические часы мая 1910 г.

Пастор Ли был назначен в 1851 г. на должность в маленький город Мосс, расположенный на берегу фьорда Осло, недалеко от столицы, которая тогда называлась Христианией. Маленький Софус посещал городскую школу в этом городе; в возрасте 15 лет он стал учеником частной гимназии в Христиании, а через два года начал слушать курсы в Университете Христиании. Он был хорошим учеником по всем предметам, и нельзя было предвидеть, что он более способен по какой-нибудь одной дисциплине, чем по другой. Он не давал никаких оснований считать его преждевременно развитым в математике, как это было с такими знаменитостями, как Паскаль и Клеро, а также с Абелем, который был самым молодым профессором математики.

В 1865 г., получив диплом лиценциата наук, Софус Ли довольно долго не решался выбрать путь, по которому он должен пойти; он был не уверен в своем призвании и мучился от этого. Внезапно, в 1868 г., лекция о работах французского геометра Понселе и немецкого геометра Плюккера пробудила в нем непреодолимое желание стать математиком. Всю свою

Un centenaire; Sophus Lie // Les grands courants de la pensée mathématique: Éd. F. Le Lionnais. Fontenay-aux-Roses: Cahiers du Sud, 1948. P. 253—257.

жизнь он сохранял благодарность этим двум ученым, которых он не знал лично, так как Понселе умер в 1867 г., а Плюккер — в 1868 г.; но и тот и другой оказали глубокое влияние на общее направление исследований Софуса Ли.

Первые статьи Софуса Ли дали ему возможность в 1869 г. получить государственную стипендию, которая позволила ему длительное время пробыть за границей. Зиму 1869—1870 гг. он провел в Берлине, где познакомился с учеником Плюккера Феликсом Клейном и подружился с ним; они работали вместе, обменивались идеями, и несомненно, что это оказалось чрезвычайно плодотворным как для одного, так и для другого.

Летом 1870 г. они вместе отправились в Париж, где познакомились с Камиллом Жорданом и Гастоном Дарбу. Последний был того же возраста, что и Ли, а первый был старше на 4 года; оба они представляли славу французской науки.

Именно в Париже Софус Ли сделал одно из самых прекрасных своих открытий — знаменитое преобразование, которое носит его имя и устанавливает неожиданное соответствие, с одной стороны, между прямыми линиями и сферами пространства, а с другой стороны, между асимптотическими линиями и линиями кривизны поверхностей. Одного этого открытия, приводящего в восторг всех геометров, достаточно для того, чтобы обессмертить имя Софуса Ли.

После объявления франко-прусской войны Клейн возвращается в Берлин, а Софус Ли остается во Франции и собирается идти пешком в Италию через всю Францию. Он был арестован почти в самом начале при прохождении леса Фонтенбло. Быть может, облик рассеянного математика, быть может, просто его внешний вид, без сомнения, обнаруживающий в нем иностранца, заставили заподозрить его в шпионаже, и Ли пришлось провести четыре недели в тюрьме Фонтенбло, откуда он был освобожден благодаря активному вмешательству Дарбу. Нам кажется, что Софус Ли не обиделся за это маленькое злоключение, которое, быть может, помимо всего, дало ему убежище, где он смог спокойно размышлять и работать.

Из Италии, куда он прибыл без затруднений, Софус Ли вернулся в Христианию через Швейцарию и Германию.

Получив степень доктора наук в 1871 г. за диссертацию, в которой он развивал многочисленные следствия из своего открытия, сделанного в Париже, Софус Ли преподавал в течение года в Лундском университете в Швеции (в это время Швеция и Норвегия составляли единое государство). Благодаря вмешательству своих друзей и рекомендации иностранных ученых, высоко оценивших значение его работ, парламент

Норвегии создал для Ли кафедру в Университете Христиании. Теперь он мог при полном спокойствии духа предаться развитию своих идей.

В это время он женился на дальней родственнице своего знаменитого соотечественника Абеля. Это был счастливый брак, который принес двух дочерей и сына.

Этот период жизни Софуса Ли отмечен большой интеллектуальной активностью. Мемуары следуют за мемуарами — мемуары по геометрии, мемуары по анализу об интегрировании уравнений в частных производных. Естественно, я не могу даже мечтать проанализировать эти работы, хотя мне удалось решить аналогичную задачу для сочинений великого французского геометра Гаспара Монжа, одного из основателей Политехнической школы, который в своем труде показал, что анализ и геометрия должны взаимно опираться друг на друга. Софус Ли своей славой обязан прежде всего созданной им теории групп преобразований, необходимость и плодотворность которой он счастливо предвидел. В этом смысле он является, и это общепризнанно, продолжателем французского математика Эвариста Галуа, чья краткая и бурная карьера (он умер в 20 лет) оставила бессмертный труд, отклики на который, быть может, еще ощущаются до сих пор.

Галуа показал, что понятие группы перестановок дает ключ для всей теории решения алгебраических уравнений, и, в частности, он нашел глубокую причину невозможности решить в радикалах уравнения, степень которых превосходит 4; невозможности, которую для уравнений пятой степени доказал Абель. Ли же показал роль, которую понятие группы преобразований может играть в теориях интегрирования: в 1872 г. его друг Феликс Клейн в знаменитой «Эрлангенской программе» подробно изложил фундаментальную роль, которую теория групп преобразований играет в геометрии. Можно сказать, что в настоящее время эта теория пронизывает всю математику и физику. Но сама теория групп преобразований и ее аппарат еще не были созданы и ничто не указывало на путь, которым надо было следовать для их создания. Софус Ли занялся этим исследованием в 1873 г. и, упорно работая, доказал основные теоремы, из которых вскоре вывел очень много следствий.

В 1882 г., читая статью французского математика Альфана, Софус Ли понял, что его предыдущие работы позволяют ему высоко подняться над проблемой, изложенной Альфаном. Он почувствовал необходимость изложить результаты своих предыдущих исследований в большом дидактическом труде специально для тех, кто хочет изучить эту теорию групп.

Благодаря преданному сотрудничеству молодого немецкого математика Фридриха Энгеля задуманный труд был закончен и опубликован

после 9 лет работы над ним; он появился в виде трех больших томов, вышедших один за другим в 1888—1893 гг.

В 1886 г. Ли был приглашен в Лейпцигский университет для того, чтобы сменить Клейна, назначенного профессором Геттингенского университета. В Лейпциге Ли мог теперь собрать своих учеников; он был счастлив увидеть здесь нескольких молодых выпускников Высшей Нормальной школы, присланных директором школы Жюлем Таннери для того, чтобы изучать теорию групп там, где она создается. Я буду рад упомянуть среди них Эрне Вессио, ныне почетного директора Нормальной школы, который смог своими исследованиями продолжить труд Софуса Ли.

В 1892 г. Ли приезжает в Париж на 6 месяцев, с большим интересом и вниманием он относится к исследованиям молодых французских ученых по теории групп. Его часто можно было видеть, окруженного ими, за столиком в кафе «La source» («Источник») на бульваре Сен-Мишель; нередко бывало, что белое мраморное покрытие одного из столиков оказывалось заполненным формулами, которые мэтр писал карандашом, чтобы пояснить свои идеи.

Безразличие, можно сказать, игнорирование, с которым были встречены большинством математиков первые работы Софуса Ли, теперь сменилось восхищением. Многие крупные академии, кроме, однако, Берлинской, избрали Ли в число своих членов. Во время его пребывания в Париже 7 июня 1892 г. Парижская академия наук избрала его своим членом-корреспондентом по отделению геометрии.

Через год, в 1893 г., вышел третий том его большого труда; он был посвящен Высшей Нормальной школе — эта дань уважения была выражением почтения к Школе, студентом которой был Эварист Галуа, а директор понимал важность труда великого норвежского ученого. Софус Ли должен был снова приехать в Париж некоторое время спустя, в 1895 г., на празднование столетия Нормальной школы, и для книги, издаваемой по этому случаю, он должен был написать статью, содержащую глубокую характеристику труда основателя теории групп Галуа.

В 1897 г. Казанское физико-математическое общество впервые присуждало премию имени Лобачевского, учрежденную в честь русского математика, который первым дал систематическое изложение неевклидовой геометрии, основанной на отрицании постулата Евклида. Эта премия значительной ценности должна была присуждаться каждые 5 лет за публикацию лучшей книги по геометрии, преимущественно неевклидовой геометрии. По докладу Феликса Клейна, который был интересен и сам по себе, премия была присуждена Софусу Ли. Большая часть третьего

тома его труда действительно была посвящена углубленному обсуждению гипотез или аксиом, которые должны быть положены в основу геометрии, для того чтобы сделать вывод, исходя из принятого, выполняется ли в этой геометрии постулат Евклида или нет и является ли геометрия классической евклидовой или неевклидовой геометрией Лобачевского или Римана. Эти исследования позволили впоследствии исправить в некоторых пунктах, уточнить и дополнить работы великого физика Гельмгольца.

Вскоре после получения премии имени Лобачевского Софус Ли покинул Лейпциг, чтобы занять в Университете Христиании кафедру теории групп, которую его родина создала для него. Но по прибытии на родину состояние его здоровья сильно ухудшилось. Злокачественная анемия медленно подтачивала его силы, и он тихо угас 18 февраля 1898 г. в возрасте 56 лет.

В 1921 г. Энгель в сотрудничестве с профессором университета в Христиании Хегором начал публиковать полное собрание сочинений Софуса Ли. Оно состояло из шести больших томов и включало многочисленные заметки и очень интересные выдержки из писем Ли к различным иностранным математикам. Этот труд — прекрасный памятник, воздвигнутый во славу Софуса Ли, — был завершен в 1936 г., когда в Осло состоялся Международный математический конгресс, на котором собралось большое число математиков из всех стран мира. На одном из заседаний конгресса в присутствии самых высокопоставленных лиц Норвегии, в большом зале университета был установлен бюст Софуса Ли, и один из французских делегатов прочел послание Нормальной школы, посвященное памяти Софуса Ли. С 1939 г. копия этого бюста, подарок Германа Ли, сына великого геометра, украшает научную библиотеку Нормальной школы.

Софус Ли был высокого роста и имел классическую внешность человека Севера. Светлая широкая борода обрамляла его лицо, и его серо-голубые глаза светились за очками. Он производил впечатление человека необычайной физической силы. При общении с ним всегда чувствовалась его искренность и доброта. Он не боялся признать своего незнания тех разделов математики, которые не были ему близки, но это не мешало ему сознавать их значение.

Софус Ли не всегда был приятен при общении, особенно во время тяжелых приступов неврастении, которые отнимали у него сон и всякую возможность трудиться. Он должен был проводить много времени в психиатрической больнице. Когда он немного поправлялся, его активность возвращалась. Если верить его сотруднику Энгелю, у которого я заимствую эти подробности, характер Ли менялся, в частности, он становился

чрезвычайно обидчивым, подозревал своих учеников в том, что они похищают его идеи. Что представляют собой эти маленькие странности по сравнению с величием труда Софуса Ли?

Потомки будут видеть в нем только гения, создавшего теорию групп преобразований, но мы, французы, никогда не сможем забыть о наших связях с ним, которые делают память о нем дорогой для нас.

Оглавление

Предисловие 3

Глава 1. Жизненный путь Картана 4

Отчий дом (4). Школьник и лицеист (6). Студент (7). Доктор наук (9). Профессор (11). Академик (18). Семья Картана (22). Картан и математики мира (24).

Глава 2. Группы Ли и алгебры 30

Группы (30). Группы и алгебры Ли (34). Работы Киллинга (39). Диссертация Картана (43). Корни комплексных простых групп Ли (45). Группы Вейля комплексных простых групп Ли (52). Ассоциативные и альтернативные алгебры (59). Работы Картана об ассоциативных алгебрах (64). Линейные представления комплексных простых групп Ли (65). Вещественные простые группы Ли (70). Топология групп Ли (78). Конечные группы типа Ли (80). Редуктивные и квазиредуктивные группы Ли (81).

Глава 3. Проективные пространства и проективные метрики 83

Проективные и аффинные пространства (83). Евклидовы пространства (87). Эллиптическое и гиперболическое пространства (88). Конформные пространства (90). Симплектические пространства (91). Проективные метрики (92). Комплексные пространства (95). Двойные и дуальные пространства (100). Кватернионные пространства (102). Октонионные плоскости (107). Конечные геометрии (112). Образы симметрии (114). Параболические образы (117). Эквивалентные геометрии (122).

Глава 4. Псевдогруппы Ли и уравнения Пфаффа 124

Псевдогруппы Ли (124). Алгебры Каца—Муди (126). Уравнения Пфаффа (128). Алгебра внешних форм (133). Применение теории систем в инволюции (135). Кратные интегралы, интегральные инварианты и интегральная геометрия (136). Дифференциальные формы и числа Бетти (140). Новые методы в теории дифференциальных уравнений в частных производных (143).

Глава 5. Метод подвижного репера и дифференциальная геометрия 144

Подвижные триэдры Френе и Дарбу (144). Подвижные тетраэдры и пентасферы Демулена (146). Подвижные реперы Картана (148). Деривационные формулы (150). Уравнения структуры (152). Применение метода подвижного репера (153). Изотропные кривые (154). Линейчатые поверхности (157). Кривые на аффинной, проективной и изотропной плоскостях (158). Многомерные поверхности в евклидовом пространстве (159). Минимальные поверхности (162). Изотропные поверхности (164). Изгибание многомерных поверхностей. Многомерные поверхности в проективном пространстве (169). Инвариантное оснащение поверхностей (174). Псевдоконформная геометрия гиперповерхностей (178).

Глава 6. Римановы и симметрические пространства 180

Римановы пространства (180). Псевдоримановы пространства (184). Параллельное перенесение векторов (185). Риманова геометрия в ортогональном репере (187). Проблема погружения риманова пространства в евклидово (188). Римановы пространства, удовлетворяющие «аксиоме плоскости» (190). Симметрические римановы пространства (191).

Эрмитовы пространства как симметрические пространства (196). Симметрические пространства и образы симметрии (199). Абсолюты симметрических пространств (202). Геометрия подгрупп Картана (203). Подмногообразия Картана симметрических пространств (204). Антиподные многообразия симметрических пространств (205). Ортогональные системы функций на симметрических пространствах (206). Топология симметрических пространств (208). Редуктивные и параболические пространства (209). Группы изотропии симметрических и параболических пространств (210). Унитарные представления некомпактных групп Ли (211). k-симметрические пространства (214).

Глава 7. Обобщенные пространства 218

«Аффинные связности» и «метрические многообразия» Вейля (218). Пространства аффинной связности (219). Пространства евклидовой, изотропной и метрической связности (222). Аффинные связности в группах Ли и симметрические пространства аффинной связности (223). Редуктивные пространства как симметрические пространства с кручением (226). Пространства проективной связности (227). Пространства конформной связности (228). Пространства симплектической связности. Эрмитовы римановы и келеровы пространства (229). Работы Картана по физике (231). Финслеровы пространства (232). Метрические пространства, основанные на понятии площади (234). Проблемы эквивалентности и G-структуры (236). Квазигруппы и ткани (239).

Заключение 245

Даты жизни и деятельности Картана 247

Список сочинений Картана 250

Математические сочинения Картана (250). Работы Картана по истории науки и его воспоминания (267). Собрания сочинений и сборники работ Картана (268). Научная переписка Картана (269).

Список литературы 270

Приложение 1. *Э. Картан.* Выступление на праздновании 70-летия 288

Приложение 2. *Э. Картан.* Роль Франции в развитии математики . 294

Приложение 3. *Э. Картан.* К столетию Софуса Ли 318

Макс Айзикович Акивис
Борис Абрамович Розенфельд

ЭЛИ КАРТАН
1869—1951

Подписано в печать 25.12.2006 г. Формат 60 × 88 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 20,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 7694.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554-21-86

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 5-94057-208-1
9 785940 572084 >

интернет-магазин
OZON.ru
67797516